Cuneiform Digital Library Preprints

<http://cdli.ucla.edu/?q=cuneiform-digital-library-preprints>

Hosted by the Cuneiform Digital Library Initiative (<http://cdli.ucla.edu>)

Editor: Bertrand Lafont (CNRS, Nanterre)

Number 11

Title: Zur Frage von Ausdruck und Normgültigkeit mathematischer Regeln in Mesopotamien

Author: Hagan Brunke

Posted to web: 18 December 2017

Zur Frage von Ausdruck und Normgültigkeit mathematischer Regeln in Mesopotamien[1]

Hagan Brunke

(Freie Universität Berlin)

Zusammenfassung

Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Grad an Fundamentalität einer mathematischen Regel, der Explizitheit ihres Aufscheinens im Textbefund, und ihrem Maß an Normgültigkeit: Je weniger grundlegend eine Regel ist, desto expliziter ist sie formuliert; je komplexer sie ist, desto weniger zwingend ist sie. Entsprechend sind die Algorithmen in den Aufgabentexten eher Möglichkeiten denn Vorschriften. Illustriert wird dieser Umstand anhand eines Beispiels zweier gänzlich verschiedener Lösungsverfahren für dieselbe Aufgabe auf derselben Sammeltafel.

1 Allgemeines

Um mathematische Regelsysteme mit anderen Regelsystemen, beispielsweise rechtlichen, vergleichen zu können, ist zunächst zu klären, was unter einer mathematischen Regel verstanden werden soll. Das bedeutet zum einen die Frage, was im altorientalischen Kontext überhaupt als "mathematisch" gelten soll, insbesondere also, welche Textgattungen zu betrachten sind. Und zum anderen, welche Typen von mathematischen Regeln es gibt.

1.1 Textevidenz

"Mathematische Texte". In der Altorientalistik und der altorientalischen Wissenschaftsgeschichte ist der Begriff "mathematischer Text"[2] weniger über den mehr oder weniger mathematischen Inhalt definiert, sondern ganz praktisch über die Zugehörigkeit zu einem der folgenden Textformate:[3] (a) Aufgabentexte (engl. "problem texts")[4], (b) arithmetische und metrologische Tabellentexte[5], (c) Koeffizientenlisten[6].

Diesen Texten, die im Zusammenhang mit der Schreiberausbildung stehen und die deshalb in der Regel als "Schultexte" angesprochen werden, stehen solche gegenüber, die die Anwendung der/des in diesen Texten vermittelten Kenntnisse/Wissens/Praktiken in der Praxis dokumentieren. Es sind das vor allem *administrative Texte* ("Wirtschaftsurkunden"). Gerade im Zusammenhang mit der Frage nach Regelchararkter und Normgültigkeit erweist sich die Beschränkung auf die eben angeführten, in der Fachliteratur als "mathematisch" bezeichneten Texte als hinderlich. Zum einen, weil in ihnen viele solche praxisbezogenen, in administrativen Texten allgegenwärtigen (impliziten) Regeln fehlen. Zum anderen, weil sich der Regelcharakter von etwas und weiter die Normgültigkeit der Regel nicht bereits aus seinem bloßen Geltungs*anspruch* ergibt, sondern erst durch seine allgemeine *Anerkennung als Regel* (also durch Anerkennung dieses Anspruchs) und weiter durch deren Annerkennung als Norm, die wiederum sich in der tatsächlichen und möglichst ausschließlichen Verwendung in der Praxis manifestiert.[7] Soweit die administrativen Texte die praktische Anwendung mathematischer Regeln (insbesondere z.B. die Verwendung technischer Konstanten und Leistungsparameter) reflektieren, sollen sie deshalb im Rahmen dieser Betrachtungen ebenfalls als "mathematisch" angesehen und berücksichtigt werden. Das be-

trifft insbesondere das umfangreiche Corpus der neusumerischen[8] administrativen Texte. Zwei Beispiele werden kurz vorgestellt: Feldpläne und Wertäquivalenzen.

Feldpläne. Diese Urkunden dokumentieren Erfassung und Berechnung von landwirtschaftlich genutzten Feldflächen, deren Längenausdehnung bis zu mehrere Kilometer betragen hat. Diese Texte sind impliziter Reflex der Grundregel (s.u.) der Additivität des Maßes (vgl. Fußnote 18), der zufolge der Inhalt eines Flächenstücks berechnet werden kann, indem man das Flächenstück in Teilflächenstücke zerlegt, deren Inhalte berechnet und die Ergebnisse addiert. Das allgemeine, standardisierte Muster dieser Texte ist das folgende:[9] Zunächst wird das Feld durch eine aus annähernd rechtwinklig-trapezförmigen Vierecken zusammengesetzte Figur (sum. **temen** "Basis") in seinem Innern approximiert (die Basis kann an einzelnen Stellen über das eigentliche Feld hinausragen, in welchem Fall die überstehenden Teile nachträglich abgezogen werden). Der über die Basis hinausragende Rest der Feldfläche (sum. **bar** "Äußeres"), wird in einfach zu berechnende Flächenstücke, nämlich (annähernd) rechtwinklige Dreiecke und Trapeze zerlegt. Die Kantenlängen der so entstehenden Teilfiguren werden entlang der Kanten angeschrieben, die daraus berechneten Flächeninhalte im Innern der Basis bzw. (für die Teilstücke des Außenbereichs) außerhalb der Feldfigur, mit Schreibrichtung von innen nach außen. Die Flächeninhalte der Teilstücke, aus denen die Basis zusammengesetzt ist, werden nach einem speziellen Verfahren zweimal berechnet (einmal "richtig herum" und einmal "auf dem Kopf stehend" angeschrieben) und anschließend gemittelt.[10] Ein Beispiel zeigt Abbildung 1.[11]

Wertäquivalenzen. Ein charakteristisches Merkmal der Verwaltung administrativer Haushalte (z.B. Palast, Tempel) ist die Verwendung von Bezugsgrößen-Äquivalenten zur Erfassung des Gesamtwertes großer Mengen ein- oder ausgelieferter Waren. Bei diesen Waren handelt es sich häufig um Getreide, Getreidefolgeprodukte und diverse daraus erzeugte Lebensmittel, die Bezugsgröße ist dann hauptsächlich Gerste. Jedes Produkt hat einen festen, über die Zeit konstanten Gerste-Äquivalentwert.[12] Der Gesamtwert einer Warenlieferung wird dann im Gerste-Äquivalent angegeben. Die Texte folgen einem regelhaften Schema, sowohl im Hinblick auf die Anordnung der Produkte[13] wie auch im Bezug auf die rechentechnische Gliederung.[14] Im Hinblick auf die Ausführlichkeit der Darstellung gibt es gewisse Freiheiten, ähnlich wie in den mathematischen Aufgabentexten: in manchen Texten werden mehr Zwischenschritte explizit notiert als in anderen. Die umfangreicheren dieser Texte sind strukturell recht komplex.[15] Eine schematische Analyse eines solchen Texts zeigt Abbildung 2.

1.2 Mathematische Regeln

Es erweist sich als sinnvoll, bei den mathematischen Regeln zwischen *Grundregeln* und *abgeleiteten Regeln* zu unterscheiden.[16,17] Die Begriffe sollen wie folgt verstanden werden:

1. Mathematische *Grundregeln* (Grundtatsachen) sind unmittelbar als richtig (gültig, wahr) erkannte oder auch einfach vorausgesetzte/angenommenene/unterstellte Tatsachen (in heutiger Sprechweise etwa "Axiome")[18] sowie (ggf. sekundär) getroffene Übereinkünfte bzw. Festsetzungen.[19]

2. *Abgeleitete Regeln* sind aus Grundregeln oder aus anderen (einfacheren) abgeleiteten Regeln abgeleitet, folgen also aus ihnen durch mathematisches Schließen.[20] Abgeleitete Regeln können sehr unterschiedlich komplex sein, je nachdem, ob sie direkt aus den Grundregeln abgeleitet sind[21] oder mehrerer oder gar vieler Teil- bzw. Zwischenschritte bedürfen, wie

beispielsweise die komplexen Algorithmen zur Lösung quadratischer Gleichungssysteme, von Feldteilungsproblemen etc. Letztere sind es, die aufgrund ihres dann auch differenzierteren sprachlichen Niederschlags (in den Aufgabentexten) in den anderen Beiträgen dieses Bandes vorzugsweise behandelt werden.

Als Regel*system* kann man eine Gruppe thematisch/inhaltlich zusammengehöriger oder aufeinander bezogener Regeln verstehen.[22] Ein solcher Aufeinander-Bezug kann ggf. wieder als (übergeordnete, Meta-) Regel begriffen werden, was aber hier nicht weiter verfolgt wird.[23]

Neben die "eigentlichen" mathematischen Regeln könnte man als *Methodenregeln/Schlussregeln* die beiden grundlegenden Herleitungsprinzipien Mittelung und Analogiebildung[24] (und ggf. weitere) stellen.[25]

Es scheint, dass das Konzept der unmittelbar als gültig erkannten oder angenommenenen Grundtatsachen ("Axiome") in gewisser Weise mit dem des überpositiven Rechts im Sinne (nicht verschriftlichter) rechtlicher Fundamentalien vergleichbar ist. In diesem Sinne schlage ich folgende Entsprechung zwischen mathematischen und rechtlichen Regeln vor:[26]

Grundregeln/Grundtatsachen (ohne Festsetzungen)	$\longleftrightarrow$	natürliches/überpositives Recht
Festsetzungen und abgeleitete Regeln	$\longleftrightarrow$	positives Recht

2 Manifestation und Gültigkeitsanspruch

Im Folgenden geht es um die Frage, auf welche Weise sich mathematische Regeln im Textbefund manifestieren und welcher Zusammenhang zwischen Ausdruck und (dem Maß an) Normgültigkeit besteht. In diesem Zusammenhang ist es von entscheidender Bedeutung, dass etwas (z.B. eine Aussage darüber, wie etwas ist oder sein kann bzw. soll) nicht bereits aufgrund des ihr innewohnenden Geltungsanspruchs (also dadurch, dass es als solche postuliert und ggf. explizit niedergeschrieben ist) eine Regel ist, sondern erst dadurch, dass dieser Geltungsanspruch (und damit der Regelcharakter von etwas) innerhalb der diesbezüglich relevanten Gruppe von Personen allgemein anerkannt wird; und dass eine Regel erst dadurch zur *Norm* wird (d.h. Normgültigkeit besitzt), wenn sie im "mathematischen Alltag", in der täglichen einschlägigen Praxis tatsächlich angewandt wird, und zwar (zumindest fast) ausschließlich (vgl. Abschnitt 1.1 oben), also wiederum durch die *allgemeine Anerkennung*, diesmal als Norm.[27] Entsprechend ist die Normgültigkeit einer Regel für uns erst dann erkennbar, wenn Textbefund (oder anderer gleichwertiger Befund) *aus der Praxis* vorliegt, der ihre (zumindest fast) ständige und ausschließliche Verwendung in einem bestimmten Kontext belegt. Damit kann dann aber auch eine mathematische Regel und ggf. ihre Normgültigkeit sogar dann als solche erkennbar sein, wenn sie nirgendwo explizit als solche formuliert ist (implizite Regel),[28] sofern nur hinreichende Evidenz für ihre (fast) ständige und ausschließliche Verwendung vorliegt.

Wichtig ist nun, dass der *sprachliche Ausdruck* oder gar dessen genaue grammatikalische Ausprägung dabei *a priori* unerheblich ist.[29,30] Erheblich und die Anerkennung als geltende Norm massiv unterstreichend ist es allerdings, wenn (a) im Falle der Existenz sprachlichen Ausdrucks dieser immer derselbe ist, oder (b) im Falle völligen Fehlens von sprachlichem Ausdruck (z.B. in den neusumerischen Feldplänen, s.o.), die nicht-sprachliche formale Erscheinung immer dieselbe ist; in jedem Fall also die Regelhaftigkeit des Erscheinungsbildes, die Existenz eines einheitlichen Musters der Darstellung. Dies ist administrativen Texten und z.B. Prozessurkunden gemeinsam.

Es scheint, dass sich ein Zusammenhang feststellen lässt zwischen der Komplexität einer Regel, ihrem sprachlichen Ausdruck bzw. ihrer Explizitheit, und dem Maß an Normgültigkeit. Während die "Axiome" unter den Grundregeln und möglicherweise auch die Festsezungen (Abschnitt 1.2) niemals explizit als Regeln formuliert sind,[31,32] sind die abgeleiteten Regeln teils explizit als Regeln formuliert (z.B. durch Angabe der relevanten Größen in den Koeffizientenlisten, wie im Fall der Regeln zur Berechnung der Flächeninhalte regulärer Polygone), teils nur implizit (durch Anwendung in Aufgabentexten oder auch administrativen Texten, letzteres z.B. im Fall der Regel zur Berechnung des Flächeninhalts eines allgemeinen (irregulären) Vierecks).[33] Die komplexen abgeleiteten Regeln finden sich immer explizit ausformuliert in den Lösungsalgorithmen der Aufgabentexte. Charakteristisch (wenn auch nicht zwingend) für sie sind Rückbezüge und verweisende Elemente (gewissermaßen als "Variablenersatz").[34]

Die Grundregeln sind in der Regel zwingende Normen (d.h. als *allein*gültig anerkannt), da per "fundamentaler Einsicht" oder Festlegung (diese wiederum wohl in der Regel aus empirischem Befund gewonnen) etabliert, so z.B. die geometrischen Koeffizienten und Materialkonstanten in den Koeffizientenlisten, Arbeitspensa (in Koeffizientenlisten und administrativen Texten) und Wertäquivalenzen (in administrativen Texten).[35] Dagegen sind die komplexeren abgeleiteten Regeln, also z.B. Lösungsverfahren zu mathematischen Problemstellungen, freier. Es handelt sich damit eher um Lösungs*möglichkeiten* als um zwingende Vorgaben, siehe das Beispiel in Abschnitt 3 unten. Das scheint mir ein wesentlicher inhaltlicher Unterschied zu rechtlichen Regeln/ Rechtsnormen zu sein, der bei Fixierung auf den sprachlichen Ausdruck völlig untergeht.

Zusammenfassend sind die beiden wesentlichen Thesen der obigen Ausführungen, dass

1. mathematische Regeln bzw. ihre Etablierung als Normen durch Kontexte erfolgen können/ kann, die nicht im eigentlichen Sinne sprachlich sind, zumindest nicht in erster Linie, sondern z.B. durch (nichtsprachliche) regelhaft wiederkehrende *formale Strukturen*, also durch Form statt durch sprachlichen Ausdruck. Beispiele sind die altbabylonischen Koeffizientenlisten, die Wertäquivalenz-Umrechnungen von Getreideprodukten in die Grundeinheit Gerste in den neusumerischen Wirtschaftsurkunden, und — als Evidenz "völlig nichtsprachlicher Regelsysteme" — die neusumerischen Feldpläne;
2. dort, wo mathematische Regeln vermittels sprachlicher Elemente formuliert werden (Lösungsverfahren in den Aufgabentexten), sie (trotz der häufigen Verwendung von Imperativen) in vielen Fällen nicht als bindend oder zwingend zu verstehen sind, sondern als jeweils eine von ggf. mehreren Möglichkeiten, was sie von rechtlichen Regeln wesentlich unterscheiden dürfte. Es liegt in der Natur der Sache, dass der zwingende Charakter einer Regel mit zunehmender Komplexität abnimmt. Als besonders augenfälliges Beispiel werden unten (Abschnitt 3) zwei konzeptionell völlig verschiedene Lösungsverfahren ein und derselben Aufgabe (auf derselben Tafel) vorgestellt.

3 Beispiel: Quadratische Gleichungssysteme

Das angekündigte Beispiel für den nicht-zwingenden Charakter komplexer abgeleiteter Regeln sind zwei Aufgaben zu — in moderner Terminologie — quadratischen Gleichungssystemen auf der altbabylonischen Sammeltafel BM 13901. Es handelt sich um zwei verschiedene, sogar konzeptionell komplementäre Lösungswege (Vervielfachung vs. Teilung einer charakteristischen Figur bzw. Größe) für dasselbe mathematische Problem. Die erste der beiden betrachteten Aufgaben ist BM 13901, Nr. 18 (RS i 39-49):[36]

39) **a-ša$_3$** *ša-la-aš mi-it-ha-ra-ti-ia ak-mur-ma* 23 20
40) *mi-it-har-tum* **ugu** *mi-it-har-tim* 10 *i-te-er*
41) 10 *ša i-te-ru a-na* 01 *ta-na-ši* 10 *a-na* 02 *ta-na-ši* 20 **u$_3$** 20
42) 06 40-**e** 10 **u$_3$** 10 *tu-uš-ta-kal* 01 40 *a-na* 06 40 *tu-ṣa-ab* 08 20
43) *lib$_3$-ba* 23 20 *ta-na-sa$_3$-ah-ma* 15 *a-na* 03 *mi-it-ha-ra-*[*ti*]
44) *ta-na-ši* 45 *ta-la-pa-at* 10 **u$_3$** 20 *ta-ka-mar-ma*
45) 30 **u$_3$** 30 *tu-uš-ta-kal* 15 *a-na* 45 *tu-ṣa-ab-ma*
46) 01-**e** 01 **ib$_2$-sa$_2$** 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu ta-na-sa$_3$-ah-ma* 30 *ta-la-pa-at*
47) **igi**-03 *mi-it-ha-ra-ti* 20 *a-na* 30 *ta-na-ši* 10 *mi-it-har-tum*
48) 10 *a-na* 10 *tu-ṣa-ab-ma* 20 *mi-it-har-tum* **ki**-2 10 *a-na* 20
49) *tu-ṣa-ab-ma* 30 *mi-it-har-tum* **ki**-3

Die nachstehende Übersetzung folgt nicht der Zeileneinteilung des Akkadischen Texts, die sich (wie in diesen Texten üblich) nicht an einer durch die einzelnen mathematischen Schritte bzw. Operationen gegebenen inhaltlichen Gliederung orientiert, sondern gewissermaßen als "Spaghetti-Code" daherkommt. Stattdessen wird die Übersetzung jedes einzelnen Schrittes in einer eigenen Zeile gegeben, die mit den Buchsteben A bis T bezeichnet sind. Ergänzungen und Erläuterungen, die das Verständnis der sehr knapp gehaltenen Ausführungen[37] erleichtern sollen, sind in Klammern gesetzt. Die Sexagesimalzahlen des Originals sind in Dezimalzahlen umgerechnet.[38,39]

A) Ich habe die Flächen meiner drei Quadrate addiert und 1400 (ist das Ergebnis).
B) Quadratseite überragt Quadratseite um 10.
C) (Diese) 10, die übersteht, nimmst du einmal.
D) Du nimmst (diese) 10 zweimal.
E) (Die resultierende) 20 und (die resultierende) 20 (multipliziert ergeben) 400.
F) Du multiplizierst 10 (aus Schritt C) und 10 (aus Schritt C).
G) Du addierst (die resultierende) 100 zu (der) 400 (aus Schritt E).
H) Du ziehst (die resultierende) 500 von 1400 (der Summe der drei Quadrate) ab
I) und multiplizierst (die resultierende) 900 mit drei (, der Anzahl der) Quadrate(n).
J) Du schreibst (die resultierende) 2700 hin.
K) Du addierst 10 (aus Schritt C) und 20 (aus Schritt D)
L) und multiplizierst (die resultierende) 30 und (die resultierende) 30.
M) Du addierst (die resultierende) 900 zu 2700 (aus Zeile J)
N) und die Quadratwurzel aus (der resultierenden) 3600 ist 60.
O) (Von dieser 60) ziehst du die 30, die du (in Schritt L) quadriert hast, ab
P) und schreibst (die resultierende) 30 hin.
Q) Das Inverse von 3 (, der Anzahl der) Quadrate(n), $\frac{20}{60}$, multiplizierst du mit (der) 30 (aus Zeile P).
R) (Die resultierende) 10 ist die (erste) Quadratseite.
S) Du addierst 10 (gegeben in Zeile B) zu 10 (aus Schritt R) und (die resultierende) 20 ist die zweite Quadratseite.
T) Du addierst 10 (gegeben in Zeile B) zu 20 (aus Schritt S) und (die resultierende) 30 ist die dritte Quadratseite.

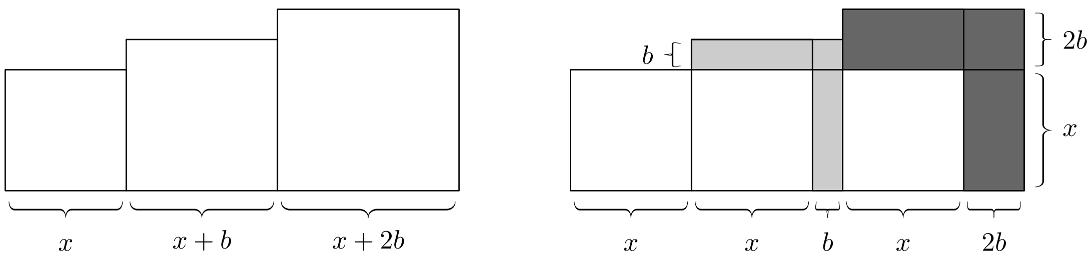
Gegeben sind also drei Quadrate unbekannter Größe sowie die Information, dass sich die Seitenlängen um je 10 unterscheiden und dass die Summe ihrer Flächen 1400 beträgt. Gesucht sind die Seitenlängen der drei Quadrate. In moderner Ausdrucksweise geht es also um die Lösung eines Systems von drei Gleichungen, nämlich

$$
\begin{array}{rl}
(i) & x^2+y^2+z^2=A \\
(ii) & y=x+b \\
(iii) & z=y+b
\end{array}
\tag{1}
$$

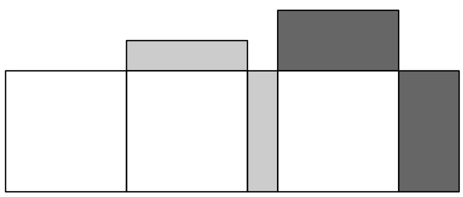
in drei Unbekannten (den Seitenlängen) x, y, z, hier mit den konkreten Zahlenwerten $A = 1400$ für die Gesamtfläche und $b = 10$ für die Differenzen zwischen den Seitenlängen.[40] Es ist wichtig zu bemerken, dass die Richtigkeit des Lösungsverfahrens von den konkreten Zahlenwerten (1400 und 10) nicht abhängt, sondern ganz allgemein gilt, wie man an der geometrischen Erläuterung unten sehen kann. Auch ist beachtenswert, dass (wie in in solchen Aufgaben häufig) Längen- und Flächenangaben ohne Maßeinheiten, sondern unterschiedslos als reine Sexagesimalzahlen angegeben werden, was ein recht hohes Maß an Abstraktion anzeigt.

Der Verdeutlichung des Lösungsverfahrens soll eine graphische Interpretation dienen, in der die einzelnen Schritte durch Zerlegung, Beschneidung und Neuzusammensetzung von geometrischen Figuren erfolgen.[41] Die gezeigten Figuren sind nicht maßstabstreu im Hinblick auf die im Text gegebenen Zahlenwerte, um zu verdeutlichen, dass die Richtigkeit des Verfahrens von diesen konkreten Werten nicht abhängt.

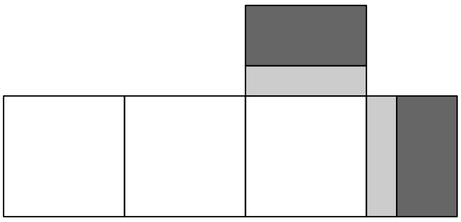
Die Gesamtfläche, also die Summe der drei Quadratflächen, lässt sich wie folgt darstellen. In der Abbildung rechts sind die "Überschüsse" des zweiten und dritten Quadrates gegenüber dem ersten in verschiedenen Graustufen wiedergegeben:



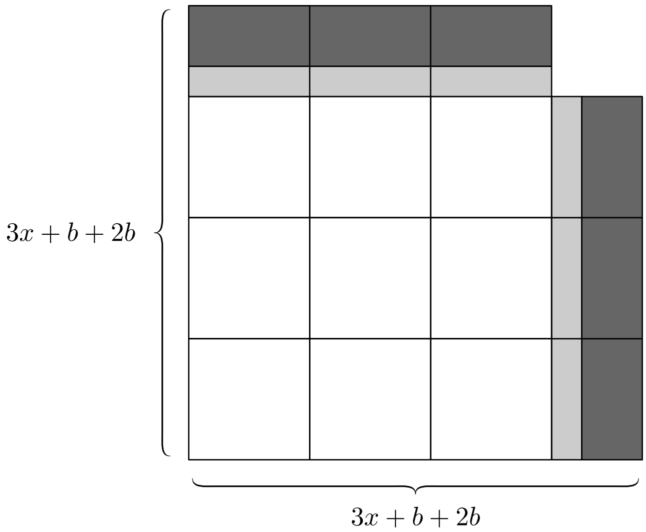
In Schritt H werden die zwei kleinen Quadrate (mit den Seitenlängen b und $2b$) aus den rechten oberen Ecken des zweiten und dritten Quadrates entfernt:



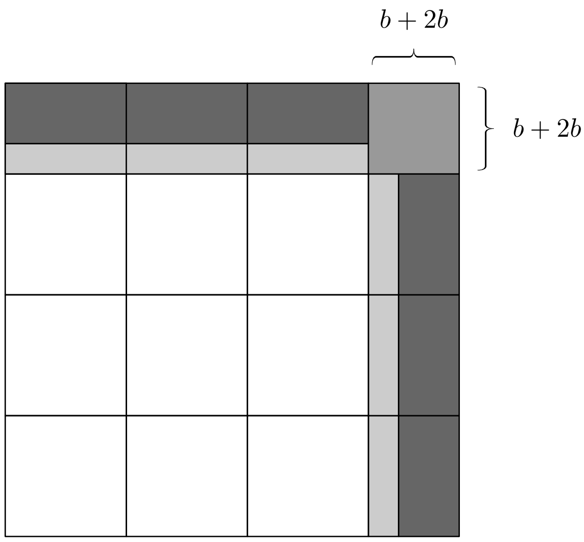
Die verbleibenden Teile der Figur können folgendermaßen umgeordnet werden:



In Schritt I wird diese Figur dreimal genommen. Das Ergebnis kann folgendermaßen angeordnet werden:



Die Addition eines Quadrates der Seitenlänge $b + 2b$ (Schritt M) liefert ein vollständiges Quadrat der Seitenlänge $3x + b + 2b$:



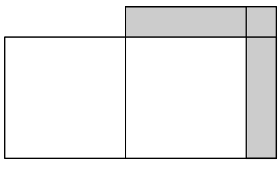
Ziehen der Wurzel aus diesem Quadrat (Schritt N) liefert seine Seitenlänge, $3x + b + 2b$. Durch Subtraktion von $b{+}2b$ (Schritt O) erhält man $3x$ und als dessen dritten Teil (Schritt Q) schließlich x, die kleinste der drei gesuchten Seitenlängen. Sukzessive Addition von b, dem Überschuss von y gegenüber x und von z gegenüber y, (Schritte S und T) liefern die Seitenlängen des zweiten und dritten Quadrates, y und z.

Wichtig ist nun, dass die Zahl 3, mit der bzw. ihrem Inversen Zwischenergebnisse multipliziert werden (Schritte I und Q), im Text explizit als "(Anzahl der) Quadrate" (Zeilen 43 und 47: 3 *mitharāti*) angesprochen wird, was darauf hindeutet, dass man um die Verallgemeinerbarkeit des Verfahrens auf analoge Probleme mit anderen Anzahlen von Quadraten wusste, in denen für diese "(Anzahl der) Quadrate" dann der entsprechende Wert anzusetzen wäre.[42] Im Fall von n Quadraten ist also das Gleichungssystem

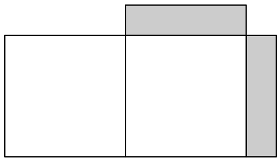
$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= A \\ x_{i+1} &= x_i + b \quad \text{für} \quad i \in \{1, \ldots, n-1\} \end{aligned} \tag{2}$$

zu lösen.[43] Für eine graphische Darstellung analog der oben gegebenen für den Fall $n = 4$ siehe Anhang A. Insbesondere funktioniert das Verfahren aber auch für den Fall lediglich zweier Quadrate (also $n = 2$), wie die folgenden Abbildungen analog zu oben veranschaulichen:

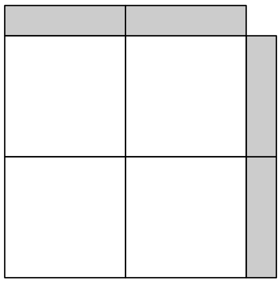
Die zwei Quadrate:



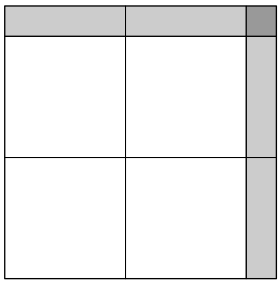
Entfernen des kleinen Quadrats in der rechten oberen Ecke des zweiten Quadrats:



Die Figur wird zweimal (der Anzahl der Quadrate) genommen und das Ergebnis umgeordnet:



Das Resultat wird zu einem vollständigen Quadrat ergänzt:



Anschließend wird aus diesem vollständigen Quadrat die Wurzel gezogen und analog zu oben die beiden Seitenlängen berechnet.

Allerdings wird in einem anderen Abschnitt *auf derselben Tafel* ein völlig anderes, in gewisser Weise sogar konzeptionell entgegengesetztes Verfahren zur Lösung genau dieses Problems für den Fall von zwei Quadraten angewandt:[44] BM 13901, Nr. 9 (VS ii 3-10).[45]

3) **a-ša$_3$** *ši-ta mi-it-ha-ra-ti-ia ak-mur-ma* 21 40
4) *mi-it-har-tum* **ugu** *mi-it-har-tim* 10 *i-te-er*
5) *ba-ma-at* 21 40 *te-he-pi-ma* 10 50 *ta-la-pa-at*
6) *ba-ma-at* 10 *te-he-pi-ma* 05 **u$_3$** 05 *tu-uš-ta-kal*
7) 25 *lib$_3$-bi* 10 50 *ta-na-sa$_3$-ah-ma* 10 25-**e** 25 **ib$_2$-sa$_2$**
8) 25 *a-di ši-ni-šu ta-la-pa-at* 05 *ša tu-uš-ta-ki-lu*
9) *a-na* 25 *iš-te-en tu-ṣa-ab-ma* 30 *mi-it-har-tum*
10) 05 *lib$_3$-bi* 25 *ša-ni-im ta-na-sa$_3$-ah-ma* 20 *mi-it-har-tum ša-ni-tum*

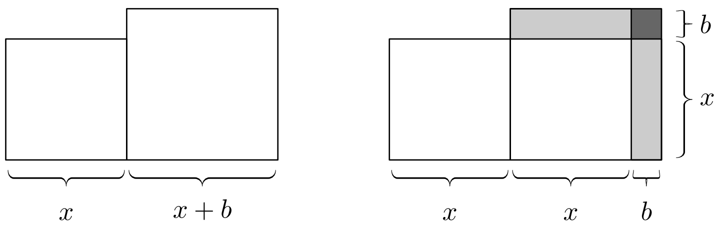
A) Ich habe die Flächen meiner zwei Quadrate addiert und 1300 (ist das Ergebnis).
B) Quadratseite überragt Quadratseite um 10.
C) Du brichst die Hälfte von 1300 (aus Zeile A) ab
D) und schreibst (die resultierende) 650 hin.
E) Du brichst die Hälfte von 10 (aus Zeile B) ab
F) und multiplizierst (die resultierende) 5 und (die resultierende) 5.
G) Du reißt (die resultierende) 25 aus 650 (aus Zeile D) heraus.
H) (Aus der resultierenden) 625 (ist) 25 (die) Quadratwurzel.
I) Du schreibst (diese) 25 zweimal hin.
J) Du addierst die 5, die du (in Schritt F) quadriert hast, zu der einen 25 (aus Zeile I)
K) und (die resultierende) 30 ist (die erste) Quadratseite.
L) Du ziehst (die) 5 (die du in Schritt F quadriert hast) von der zweiten 25 (aus Zeile I) ab
M) und (die resultierende) 20 ist die zweite Quadratseite.

Es geht also um das Gleichungssystem

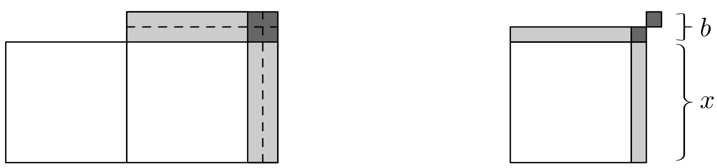
$$\begin{array}{rl} (i) & x^2 + y^2 = A \\ (ii) & y = x + b\,, \end{array} \tag{3}$$

diesmal mit den konkreten Zahlenwerten $A = 1300$ und $b = 10$. Es folgt die graphische Veranschaulichung dieses Verfahrens.[46]

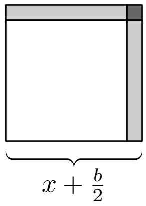
Der "Überschuss" (grau) des zweiten (größeren) Quadrates gegenüber dem ersten besteht aus den zwei hellgrauen rechteckigen Streifen der Dicke b (und der Länge x) und dem kleinen dunkelgrauen Quadrat mit Kantenlänge b:



Die Gesamtfigur (bzw. deren Fläche) kann halbiert werden ("du brichst die Hälfte von A ab", Zeile C), indem eines der beiden (gleichgroßen) weißen Quadrate, die Hälfte eines jeden der beiden hellgrauen Streifen und zwei Viertel des kleinen dunkelgrauen Quadrats entfernt werden.



Jedes der beiden verbleibenden dunkelgrauen Teilquadrate hat die Seitenlänge $\frac{b}{2}$ (im konkreten Zahlenbeispiel also 5) und damit den Flächeninhalt $(\frac{b}{2})^2$ (im konkreten Zahlenbeispiel also 25). In Schritt G wird eines von ihnen entfernt ("du reißt 25 aus 650 heraus"), z.B. das äußere. Es verbleibt ein Quadrat der Seitenlänge $x + \frac{b}{2}$:



Ziehen der Quadratwurzel daraus (Schritt H) liefert die Seitenlänge, $x+\frac{b}{2}$. Dieses Zwischenergebnis wird "zweimal hingeschrieben" (Schritt I) und anschließend zwei verschiedenen Operationen unterzogen: Addition von $\frac{b}{2}$ (Schritt J) liefert $x+b$, die Seitenlänge des größeren Quadrates (Zeile K); Subtraktion von $\frac{b}{2}$ (Schritt L) hingegen liefert x, die Seitenlänge des kleineren Quadrates (Zeile M).

A Vier Quadrate

Im Folgenden soll die Verallgemeinerbarkeit des in BM 13901, Aufgabe 18 (Abschnitt 3) für den konkreten Fall $n = 3$ ausgeführten Verfahrens zur Lösung des Gleichungssystems (2) (Seite 9) auf beliebige Werte für n durch völlig analoge Behandlung des Falles $n = 4$, also des Gleichungssystems

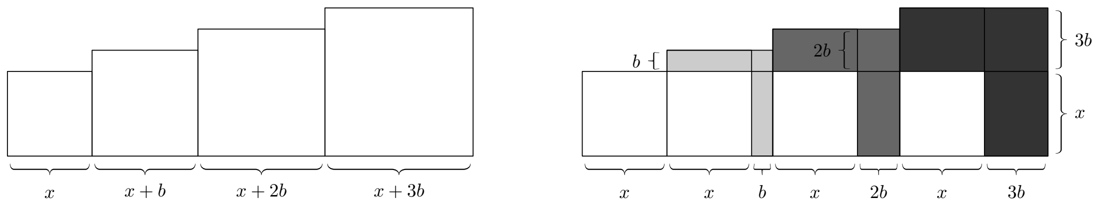
$$\begin{array}{rl} (i) & x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = A \\ (ii) & y = x + b \\ (iii) & z = y + b \\ (iv) & w = z + b \end{array} \tag{4}$$

in den jetzt vier Unbekannten (Seitenlängen) x, y, z, w illustriert werden.[47] Für die Gesamtfläche der vier Quadrate und die Differenzen zwischen den Seitenlängen werden diesmal willkürlich die Werte $A = 5400$ und $b = 10$ gewählt. Ein hypothetischer, analog zu BM 13901, Nr. 18 formulierter Aufgabentext könnte beispielsweise folgendermaßen lauten:

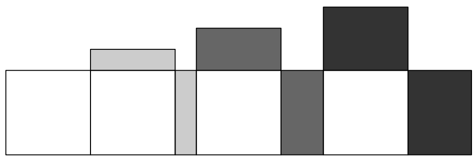
A: Ich habe die Flächen meiner vier Quadrate addiert und 5400 (ist das Ergebnis).
B: Quadratseite überragt Quadratseite um 10.
C: (Diese) 10, die übersteht, nimmst du einmal.
D: Du nimmst (diese) 10 zweimal.
E: Du nimmst (diese) 10 dreimal.
F: (Die resultierende) 30 und (die resultierende) 30 (multipliziert ergeben) 900.
G: Du multiplizierst 20 (aus Schritt D) und 20 (aus Schritt D).
H: Du addierst (die resultierende) 400 zu (der) 900 (aus Schritt F).
I: Du multiplizierst 10 (aus Schritt C) und 10 (aus Schritt C).
J: Du addierst (die resultierende) 100 zu 1300 (Resultat aus Schritt H).
K: Du ziehst (die resultierende) 1400 von 5400 (der Summe der vier Quadrate) ab
L: und multiplizierst (die resultierende) 4000 mit vier (, der Anzahl der) Quadrate(n).
M: Du schreibst (die resultierende) 16000 hin.
N: Du addierst 10 (aus Schritt C) und 20 (aus Schritt D) und 30 (aus Schritt E)
O: und multiplizierst (die resultierende) 60 und (die resultierende) 60.

P: Du addierst (die resultierende) 3600 zu 16000 (aus Zeile M)
Q: und die Quadratwurzel aus (der resultierenden) 19600 ist 140.
R: (Von dieser 140) ziehst du die 60, die du (in Schritt O) quadriert hast, ab
S: und schreibst (die resultierende) 80 hin.
T: Das Inverse von 4 (, der Anzahl der) Quadrate(n), 15:60, multiplizierst du mit (der) 80 (aus Zeile S).
U: (Die resultierende) 20 ist die (erste) Quadratseite.
V: Du addierst 10 (gegeben in Zeile B) zu 20 (aus Schritt U) und (die resultierende) 30 ist die zweite Quadratseite.
W: Du addierst 10 (gegeben in Zeile B) zu 30 (aus Schritt V) und (die resultierende) 40 ist die dritte Quadratseite.
X: Du addierst 10 (gegeben in Zeile B) zu 40 (aus Schritt W) und (die resultierende) 50 ist die vierte Quadratseite.

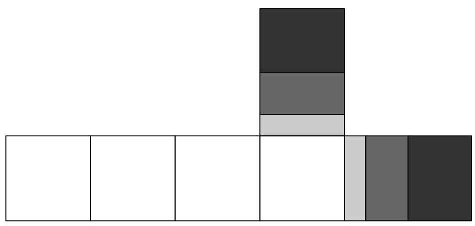
Die Gesamtfläche wird analog zu oben folgendermaßen dargestellt, rechts mit den Überschüssen des zweiten, dritten und vierten Quadrates gegenüber dem ersten in verschiedenen Graustufen:



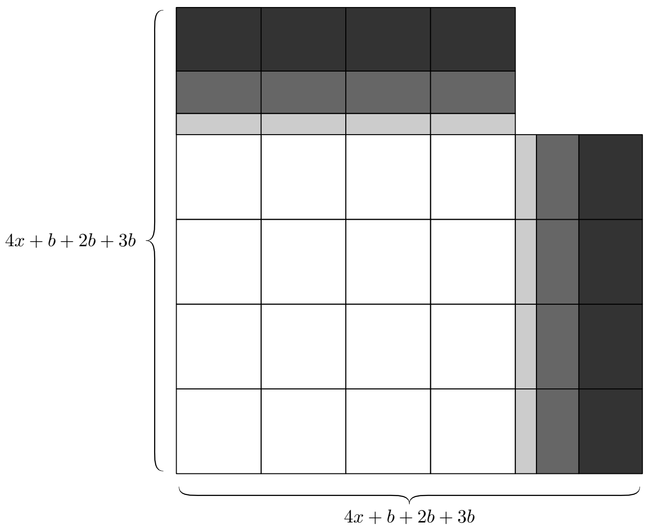
In Schritt K werden die drei kleinen Quadrate (mit den Seitenlängen b, $2b$ und $2b$) aus den rechten oberen Ecken des zweiten, dritten und vierten Quadrates entfernt:



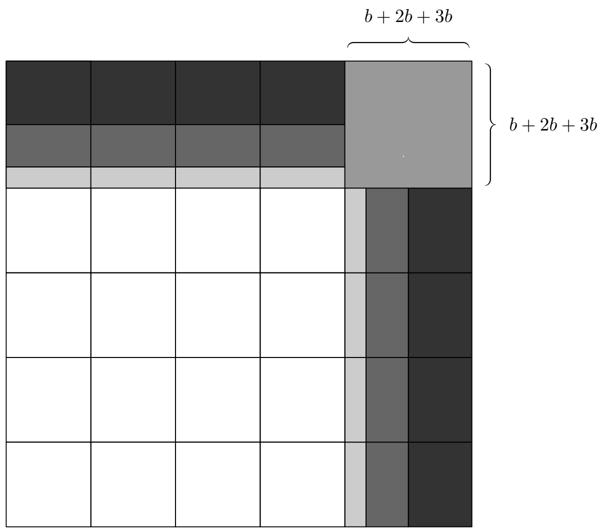
Die verbleibenden Teile der Figur können folgendermaßen umgeordnet werden:



In Schritt L wird diese Figur viermal genommen. Das Ergebnis kann folgendermaßen angeordnet werden:



Die Addition eines Quadrates der Seitenlänge $b + 2b + 3b$ (Schritt P) liefert ein vollständiges Quadrat der Seitenlänge $3x + b + 2b + 3b$:



Ziehen der Wurzel aus diesem Quadrat (Schritt Q) liefert seine Seitenlänge, $3x+b+2b+3b$. Durch Subtraktion von $b + 2b + 3b$ (Schritt R) erhält man $4x$ und als dessen vierten Teil (Schritt T) schließlich x, die kleinste der vier gesuchten Seitenlängen. Sukzessive Addition von b, dem Überschuss von y gegenüber x, von z gegenüber y, und von w gegenüber z (Schritte V, W und X) liefern die Seitenlängen des zweiten, dritten und vierten Quadrates, y, z und w.

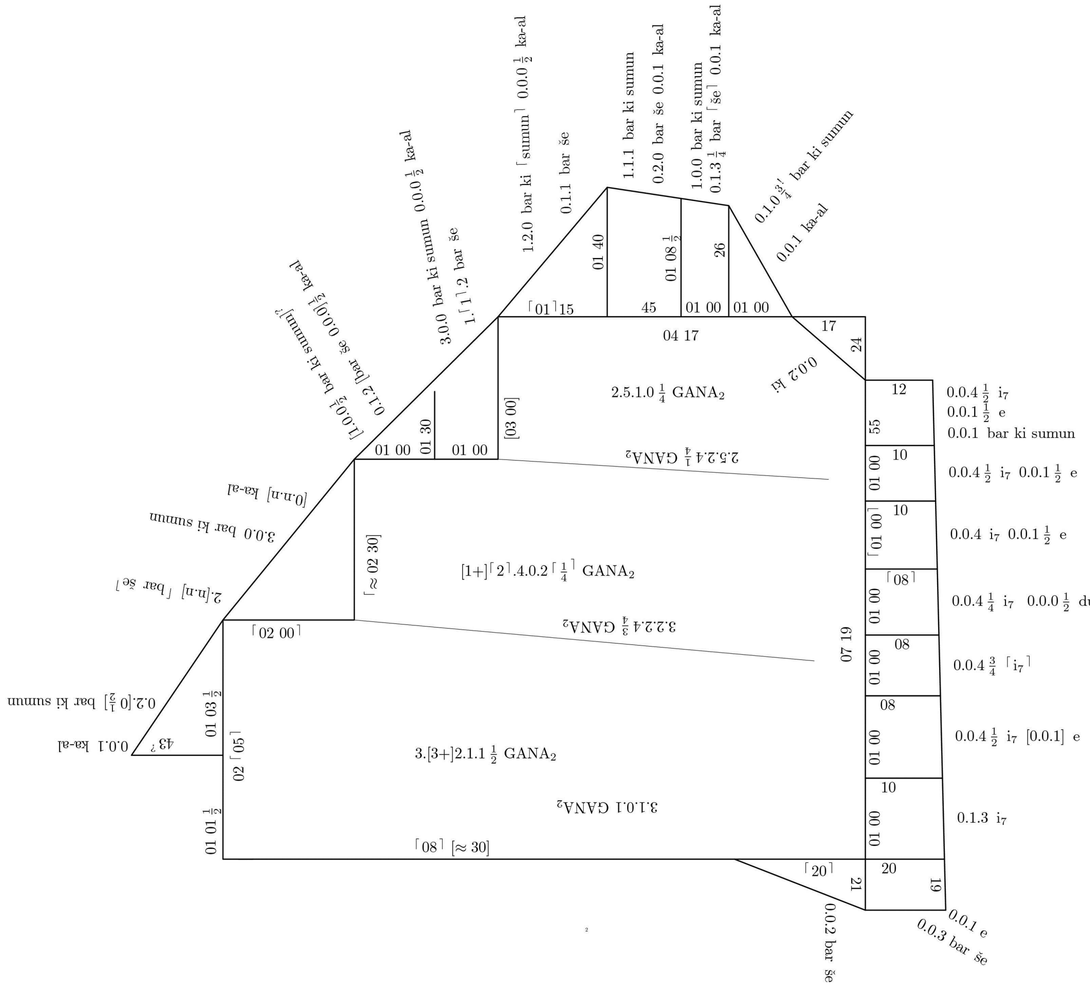


Abbildung 1: Transliteration des neusumerischen Feldplans LN 40 (Brunke, 2012a). Der Flächeninhalt des erfassten Feldes beträgt ca. 730 ha.

⋮				
7′)	ŠU.NIGIN$_2$ 8.4.1.0 **gur**	Insgesamt	(wovon?)	8.4.1.0
8′)	**še-bala-bi** 8.4.1.0	Dafür Gerste-Aufschlag		8.4.1.0
9′)	ŠU.NIGIN$_2$ 0.1.0.0 **inda$_3$** GIŠ.AŠ	Insgesamt	**inda$_3$** GIŠ.AŠ	0.1.0.0
	še-bala-bi 0.1.0.0	Dafür Gerste-Aufschlag		0.1.0.0
10′)	ŠU.NIGIN$_2$ 1.3.3.8 **sila$_3$ inda$_3$ saga$_{10}$**	Insgesamt	**inda$_3$ saga$_{10}$**	1.3.3.8
11′)	**igi-5-g̃al$_2$-bi** 0.1.4.3$\frac{1}{2}$ **sila$_3$** 06 **gig̃$_4$ gur**	Davon ein Fünftel		0.1.4.3 ▲ 36
12′)	ŠU.NIGIN$_2$ 3.1.1.8 **sila$_3$ inda$_3$** DU	Insgesamt	**inda$_3$** DU	3.1.1.8
13′)	5̃.3.3.9$\frac{1}{2}$ **sila$_3$** 06 **gig̃$_4$**	Zwischensumme		5̃.3.3.9 ▲ 36
14′)	**igi-1̃5-g̃al$_2$-bi** 0.1.5.4$\frac{2}{3}$ **sila$_3$** 02 **gig̃$_4$**	Davon ein Fünfzehntel		0.1.5.4 ▲ 42
15′)	ŠU.NIGIN$_2$ 02 35.3.1$^?$.0$\frac{1}{3}$ [**sila$_3$** . . .]	Insgesamt	[. . .]	02 35.3.1.0 ▲ 2...
16′)	**še-bi** 03 03.0.2.4 ⟨**sila$_3$**⟩ 12 **gig̃$_4$ gur**	$\sum$		03 03.0.2.4 ▲ 12
17′)	**ša$_3$-bi-ta**			
18′)	3.2.3.0 **inda$_3$** GIŠ.AŠ		**inda$_3$** GIŠ.AŠ	3.2.3.0
19′)	1.2.2.8 **sila$_3$ inda$_3$ zi$_3$**-KAL		**inda$_3$ zi$_3$**-KAL	1.2.2.8
20′)	**še-bala-bi** 4.4.5.8 **sila$_3$**	Dafür Gerste-Aufschlag		4.4.5.8
21′)	01 03.4.2.5 **sila$_3$** ⟨**inda$_3$**⟩ **saga$_{10}$ gur**		**inda$_3$ saga$_{10}$**	01 03.4.2.5
22′)	**igi-5-g̃al$_2$-bi** 12.3.5.3 ⟨**sila$_3$**⟩	Davon ein Fünftel		12.3.5.3
23′)	01 18.2.4.1$\frac{2}{3}$ **sila$_3$ inda$_3$** DU		**inda$_3$** DU	01 18.2.4.1 ▲ 40
24′)	02 4̃5.0.5.5$\frac{2}{3}$ **sila$_3$**	Zwischensumme		02 4̃5.0.5.5 ▲ 40
25′)	**igi-15-g̃al$_2$-bi** 11.0.0.3̃$\frac{2}{3}$ **sila$_3$** 02 **gig̃$_4$**	Davon ein Fünfzehntel		11.0.0.3̃ ▲ 42
26′)	6.3.0.0 **dabin gur**		**dabin**	6.3.0.0
	LEERZEILE			
27′)	[ŠU.NIGIN$_2$$^?$] ⌜03⌝ [02].3.5.9$\frac{1}{3}$ **sila$_3$**	$\sum$		03 02.3.5.9 ▲ 20

Abbildung 2: Transliteration, Übersetzung und schematische Darstellung der Wertumrechnungen in dem neusumerischen Verwaltungstext FLP 800 (Sigrist u. a., 1984, Nr. 236). In dem gezeigten Textabschnitt werden verschiedene Brotsorten (**inda$_3$** = "Brot") sowie Standard-Gerstemehl (**dabin**) auf verschiedene Weise in die Basis-Verrechnungseinheit Gerste (**še**) umgerechnet. Der erste Abschnitt verhandelt Wareneingänge, der zweite Warenausgänge. Darstellung aus Brunke (2011a, 79).

Fußnoten

[1]Diese Studie entstand im Rahmen des Projekts “Die Normativität formaler Ordnungen und Prozeduren in der Antike und im Mittelalter: Mathematische und rechtliche Regelsysteme im Vergleich” des Exzellenzclusters “Normative Orders” an der Goethe-Universität Frankfurt am Main während meiner Förderung durch das Exzellenzcluster TOPOI “The Formation and Transformation of Space and Knowledge in Ancient Civilisations” in Berlin. Sie wird zusammen mit den anderen Projektbeiträgen in der Reihe *Kārum – Emporium – Forum. Beiträge zur Wirtschafts-, Rechts- und Sozialgeschichte des östlichen Mittelmeerraums und Altvorderasiens* erscheinen. Die Transliteration der Originaltexte erfolgt kursiv für Akkadisch (z.B. *mi-it-har-tum*) und im Fettdruck für Sumerisch (z.B. **a-ša$_3$**). Tiefgestellte Zahlen (z.B. in *lib$_3$* oder **ša$_3$**) dienen der Differenzierung von Homophonen. Die Ziffern zur Notation der sexagesimal dargestellten Zahlen in den babylonischen mathematischen Keilschrifttexten werden durchgehend zweistellig geschrieben (00, 01, 02, ... , 58, 59) und durch einen kleinen Zwischenraum voneinander getrennt, z.B. 08 20 für $8 \cdot 60 + 20$ (= 500 in dezimaler Notation). Dabei wird 00 der Übersichtlichkeit wegen verwendet, z.B. 05 00 für $5 \cdot 60$ $(+\ 0 \cdot 1)$, obwohl “Null” in der Keilschrift nicht notiert wird. Das Symbol “▲” steht für ein “sexagesimales Komma”, das es ebenfalls nicht gibt, z.B. 01▲25 für $1 + 25 \cdot \frac{1}{60}$.

[2]Für einen allgemeinen Überblick zur Mesopotamischen Mathematik und zu den Textformaten siehe z.B. Vogel (1959), Neugebauer (1969) und Friberg (1987–90), für umfangreiche und erschöpfende Detailstudien Neugebauer (1935–37), Neugebauer und Sachs (1945), Høyrup (2002) und Friberg (2007), und speziell zum Thema der gesellschaftlichen Verortung der Mathematik in Mesopotamien und ihres “Sitzes im Leben” Robson (2008). Für Verzeichnisse publizierter mathematischer Texte mit Bibliographie siehe Nemet-Nejat (1993, 251-290) und Robson (2008, 299-342).

[3]Vgl. Nemet-Nejat (1993, 17-25).

[4]Es handelt sich um mathematische Aufgabenstellungen, teilweise mit und teilweise ohne Angabe des Lösungswegs. Erstere finden sich sowohl einzeln (d.h. eine Tafel mit nur einer einzigen Aufgabe) wie auch zu mehreren, in der Regel inhaltlich sortiert und nach Schwierigkeitsgrad angeordnet, auf Sammeltafeln. Ein Beispiel für eine solche Sammeltafel ist BM 13901 (vgl. Fußnote 36), von der zwei Aufgaben in Abschnitt 3 behandelt werden.

[5]Arithmetische Tabellentexte sind Multiplikations- und Reziprokentabellen, Tabellen von Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, etc.; bei metrologischen Tabellentexten handelt es sich um Listen von Längen-, Flächen- und Gewichtsmaßen als Kombinationen von Maßzahl und Maßeinheit, ggf. mit Umrechnung in ein sexagesimales Äquivalentsystem. Zu diesen Texten siehe Neugebauer (1935a, 3-94), Friberg (2007, 45-126), und zuletzt Proust (2007). Zwei Beispiele:

1. *Reziprokentabellen* geben die Kehrwerte ganzer Zahlen, z.B. MLC 1670 (Clay, 1923, Text 37) mit der allgemeinen Struktur (01) **igi**-*n*-**g̃al$_2$-bi**(**-am$_3$**) $\frac{1}{n}$ “01: der n-te Teil davon ist $\frac{1}{n}$”:

01			$\frac{2}{3}$	**-bi**	40	**-am$_3$**
			šu-ri-a	**-bi**	30	
	igi	03	**g̃al$_2$**	**-bi**	20	
	igi	04	**g̃al$_2$**	**-bi**	15	
	igi	05	**g̃al$_2$**	**-bi**	12	
	igi	06	**g̃al$_2$**	**-bi**	10	
	igi	08	**g̃al$_2$**	**-bi**	07 30	
	igi	09	**g̃al$_2$**	**-bi**	06 40	
			⋮			

(**šu-ri-a** = “Hälfte”). Als Werte für n stehen genau die sexagesimal-regulären Zahlen (das sind solche, deren Kehrwerte eine endliche Sexagesimalbruchentwicklung besitzen). Einträge für sexagesimal-irreguläre Werte von n $(7, 11, 13, 14, 17, \ldots)$ fehlen; in älteren Textvertretern (z.B. Ist.T 7375, Delaporte (1911, 131)) sind auch diese Werte für n gelistet und mit dem Hinweis **nu** “nicht” versehen, z.B. 29 **igi nu** “29: Inverses (existiert) nicht”.

2. *Quadratwurzeltabellen* listen die Quadratwurzeln von Quadratzahlen (1, 4, 9, 16, etc.), z.B. im Format n^2-**e** n **ib$_2$-sa$_2$** “aus n^2 ist n die Quadratwurzel”:

01 **-e**	01	**ib$_2$-sa$_2$**	15 00 **-e**	30	**ib$_2$-sa$_2$**
04 **-e**	02	**ib$_2$-sa$_2$**	16 01 **-e**	31	**ib$_2$-sa$_2$**
09 **-e**	03	**ib$_2$-sa$_2$**	17 04 **-e**	32	**ib$_2$-sa$_2$**
	⋮			⋮	
13 04 **-e**	28	**ib$_2$-sa$_2$**			
14 01 **-e**	29	**ib$_2$-sa$_2$**			

Textvertreter sind z.B. HS 226 (Hilprecht, 1906, Text 28) und CBS 14233 RS (Legrain, 1922, Text 22).

[6]Koeffizientenlisten sind Sammlungen geometrischer, physikalischer oder technischer Konstanten, Arbeits- bzw. Leistungsparameter etc. Geometrische Konstanten sind beispielsweise Werte für $\sqrt{2}$ (Länge der Diagonale eines Einheitsquadrats), das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser (entsprechend unserem π), das Verhältnis der Kreisfläche zum Quadrat des Kreisumfangs (entsprechend unserem $\frac{1}{4\pi}$) etc.; physikalisch-technische Konstanten beschreiben z.B. quantitative Materialeigenschaften etc. Das Akkadische Wort für "Koeffizient" ist *igigubbû* (< sumerisch **igi-gub**(**-ba**) "(fest)gesetzter Bruchteil o.ä."). Zu diesen Texten siehe Robson (1999). Als Beispiele seien angeführt Ausschnitte aus den altbabylonischen Koeffizientenlisten TMS 3 (Bruins und Rutten (1961, Text 3); zur Interpretation der Koeffizienten siehe Robson (1999, 34-40)):

2)	05	**igi-gub**	*ša₃* **gur₂**	Koeffizient des Kreises
3)	20	**dal**	*ša₃* **gur₂**	Durchmesser des Kreises
4)	10	*pi-ir-ku*	*ša₃* **gur₂**	Radius des Kreises
7)	15	**igi-gub**	*ša₃ us₂-qa-ri*	Koeffizient des Halbkreises
8)	40	**dal**	*ša₃ us₂-qa-ri*	Durchmesser des Halbkreises
9)	20	*pi-ir-ku*	*ša₃ us₂-qa-ri*	Radius des Halbkreises

und A 3553 (Kilmer (1960, Text A); zur Interpretation der Koeffizienten siehe Robson (1999, 125-129)):

18)	01 12	**igi-gub urudu**	Koeffizient (von) Kupfer
19)	01 20	**igi-gub zabar**	Koeffizient (von) Bronze
20)	01 20 21	**igi-gub** AN.NA	Koeffizient (von) Zinn
21)	01 36	**igi-gub ku₃-babbar**	Koeffizient (von) Silber
22)	01 48	**igi-gub ku₃-sig₁₇**	Koeffizient (von) Gold

[7]Dies ist analog zu rechtlichen Regeln, die erst durch ihren Niederschlag in den Dokumenten der rechtlichen *Praxis*, also z.B. in Prozessurkunden, als geltende Norm offenbar werden.

[8]Zeit der Dritten Dynastie von Ur ("Ur III-Zeit"), 21. Jhd. v. Chr. Für eine umfangreiche und detaillierte Studie zu dieser Epoche und ihren Texten siehe Sallaberger (1999).

[9]Siehe Deimel (1909, 109); Allotte de la Fuÿe (1915, 52); Dunham (1986, 33).

[10]Siehe Nissen, Damerow und Englund (1991, 110); Quillien (2003).

[11]Für weitere Studien zu den neusumerischen Feldplänen mit vielen Beispielen siehe z.B. Liverani (1990) mit Rezension von Maekawa (1992); Nissen u. a. (1991, 106-110); Friberg (2007, 137-146).

[12]Beispielsweise ist "gewöhnliches Brot" oder "gewöhnliches Bier" soviel wert wie dieselbe Menge (im Hohlmaß) Gerste, Bulghur (o.ä.) soviel wie die anderthalbfache Menge Gerste, und Weizen soviel wie die doppelte Menge Gerste.

[13]Sortiert nach Gattung, innerhalb einer Gattung nach absteigendem Gerste-Äquivalentwert.

[14]Beispielsweise werden verschiedene Produkte mit gleichem Gerste-Äquivalentwert nicht einzeln umgerechnet, sondern ihre Mengen addiert und dann die Summe umgerechnet.

[15]Für ausführliche Betrachtungen zu diesen Umrechnungen siehe Brunke (2011a, 9-22, 79-85) und die Literatur dort (S. 9).

[16]Ob eine eindeutige Zuordnung zu einer der beiden Kategorien im Einzelfall tatsächlich möglich ist, hängt natürlich wesentlich von unserem jeweiligen Kenntnisstand ab, was aber für die hier angestellten grundsätzlichen Überlegungen keine Rolle spielt.

[17]Von den mathematischen Regeln strikt zu unterscheiden sind Formulierungs- oder Codierungskonventionen für Regeln (insbesondere für die komplexen Regeln, etwa die Lösungsalgorithmen in den Aufgabentexten), d.h. etablierte, aber keineswegs absolut verbindliche Formen der sprachlichen und methodischen Darstellung einer Regel (z.B. eines Lösungsverfahrens, aber auch von einfachen Regeln, etwa in Gestalt bestimmter Formate für Koeffizientenlisten).

[18]Ein Beispiel hierfür ist die *Additivität des Maßes*, d.h. die Vorstellung, dass sich die Größenwerte, die man etwa Streckenstücken, Flächenstücken oder Körpern zuordnet (also Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte), in dem Sinne additiv verhalten, dass etwa die Länge eines (überschneidungsfrei!) aus zwei oder mehreren Teilstreckenstücken zusammengesetzten Streckenstücks oder Streckenzugs gleich ist der Summe der Längen der Teilstreckenstücke (analog für Flächenstücke und Flächeninhalte bzw. Körper und Rauminhalte). Analoges gilt für Gewichte. Diese gewissermaßen "natürliche" Vorstellung, die die gesamte Geometrie grundlegend prägt — und die vermutlich allen

Kulturen eigen war, die gemessen und/oder gewogen haben —, folgt nicht aus einfacheren oder grundlegenderen Tatsachen oder Einsichten, sondern dürfte unmittelbar aus der alltäglichen Erfahrung heraus als gültig bzw. wahr angesehen worden sein. (Das hier Gesagte gilt ebenso für die *Isotonie des Maßes*, d.h. die Vorstellung, dass der Größenwert, der einem Streckenstück (Flächenstück, ...) zugeordnet ist, kleiner oder gleich ist demjenigen Größenwert, der einem Streckenstück (Flächenstück, ...) zugeordnet ist, in dem es vollständig enthalten ist.) Heute ist diese *Additivität des Maßes* eines der Axiome des als *Maßtheorie* bezeichneten Teilgebietes der modernen Mathematik.

[19]Beispielsweise ist die Festlegung des Einheitsflächenstücks als dasjenige Quadrat, dessen Kanten die Länge des Einheitslängenstücks haben — und damit letztlich die Koppelung der Flächen- an die Längenmessung — eine solche Übereinkunft. Aus ihr und der Additivität des Maßes (vgl. Fußnote 18) folgt z.B die abgeleitete Regel (s.u.), dass der Flächeninhalt eines Rechtecks als Produkt der beiden Seitenlängen zu berechnen ist und weiters die Verfahren zur Berechnung der Flächeninhalte anderer geradlinig begrenzter Flächenstücke. Vgl. Brunke (2011b, 114-116); auch Brunke (2012b, 9-12). Ein weiteres Beispiel für eine solche Übereinkunft/Festsetzung ist möglicherweise die Bestimmung des Flächeninhalts eines Kreises als $\frac{U^2}{12}$, wobei U der Kreisumfang ist, was der Festsetzung dessen, was wir "π" nennen, auf den Wert 3, der dann freilich (als Resultat einer Übereinkunft/ Festsetzung) nicht einfach nur eine Näherung ist, siehe Brunke (2011b).

[20]Damit soll nicht angedeutet werden, dass es genau definierte Schlussregeln gegeben habe. Die Herleitung solcher abgeleiteter Regeln — von denen uns in der Regel nicht bekannt ist, wie man auf sie gekommen ist, wie also der Schlussfolgerungsprozess ausgesehen hat — mag im Einzelfall durchaus rein intuitiv erfolgt sein. In jedem Fall aber müssen sie aus den Grundregeln und anderen, bereits früher aufgefundenen abgeleiteten Regeln hervorgegangen sein. Dabei scheint es, dass sich zwei wichtige Schluss- bzw. Herleitungsmethoden identifizieren lassen: das der *Mittelung* und das der *Analogiebildung*. Siehe unten.

[21]Ein Beispiel sind die Regeln zur Berechnung der Flächeninhalte von Rechtecken und anderer geradlinig begrenzter Flächenstücke (siehe Fußnote 19), wie etwa von Dreiecken, Trapezen, regulären Fünf-, Sechs, und Siebenecken etc.

[22]Und nicht etwa eine Abfolge von nacheinander angewandten Regeln, z.B. innerhalb des Algorithmus zur Lösung einer Aufgabe. Diese ist kein Regelsystem, sondern eine Regel.

[23]Beispiele für Regelsysteme wären demnach etwa

1. die Regeln zur Berechnung der Flächeninhalte von regulärem 5-Eck, 6-Eck, 7-Eck aus der Seitenlänge; die Meta-Regel wäre dann das Prinzip der Approximation der n-Ecke durch einen Kreis (Vogel, 1959, 69-70), die auch für andere Werte von n anwendbar ist und analoge, bislang allerdings im Textbefund nicht nachgewiesene Regeln liefert,
2. das System der Wertumrechnungen in den administrativen Texten (s.o.).

Auch eine "parameterabhängige" Regel kann als Spezielfall eines Regelsystems begriffen werden, z.B. das allgemein formulierte quadratische Gleichungssystem mit $n \geq 2$ Unbekannten in BM 13901, Nr. 18, siehe unten.

[24]Vgl. Fußnote 20.

[25]Beispielsweise kommt das Prinzip Analogiebildung bei der Ableitung der Regel zur Ermittlung des Rauminhalts eines (planparallelen) Kegelstumpfs als Produkt aus seiner Höhe und dem Mittelwert der Flächeninhalte von Boden- und Deckfläche (BM 85194, Vs. iii 23-30 (Neugebauer, 1935a, 176)) zur Anwendung, und zwar als Analogiebildung zur Regel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes (Produkt aus dem Mittelwert der Längen der beiden parallelen Seiten und der Höhe). Das Prinzip der Mittelung bei der Ableitung der Regel zur Berechnung der Rauminhalts einer Rampe mit trapezförmigen Querschnitten variabler Böschung als Produkt aus dem Mittelwert der kleinsten und der größten Höhe, dem Mittelwert der Mittelwerte der vorderen und der hinteren parallelen Trapezseiten, und der Länge: BM 85194, Vs. i 1-12 (Neugebauer (1935a, 165), Brunke (2012b, 18-21)). Zwar sind diese Regeln nach heutigem Verständnis falsch, aber da sie durch Anwendung dieser grundlegenden Schlussregeln abgeleitet wurden, kann man sie durchaus als im Rahmen des Mesopotamischen mathematischen Denkens "intrinsisch richtig" ansehen. Möglicherweise ist auch die Regel zur Ermittlung des Flächeninhalts eines unregelmäßigen Vierecks als Produkt der Mittelwerte der Längen einander gegenüberliegender Seiten das Resultat einer Analogiebildung zum Trapez; für andere mögliche Ursprünge dieser Regel siehe Damerow (2001, 258f., 282ff.) und Brunke (2015, 5-7).

[26]Gemeint ist mit der vorgeschlagenen Entsprechung das Folgende: es gibt rechtliche Grundregeln oder Grundtatsachen (Fundamentalien), wie z.B., dass man nicht ohne Grund jemanden aus der eigenen Gemeinschaft töten darf. Daraus abgeleitet sind die vom Menschen festgelegten Gesetze (positives Recht), die z.B. regeln, was passiert, wenn jemand gegen die Grundregeln verstößt, also etwa jemanden (ohne hinreichenden Grund) tötet. Natürlich sind diese Gesetze nicht abgeleitet im Sinne einer mathematischen oder logischen Deduktion, sie sind aber die *Konsequenz* aus der Existenz der Grundregel. Das oben als "Methodenregeln/Schlussregeln" bezeichnete Ab-

leitungsprinzip könnten z.B. das Gerechtigkeitsempfinden, göttliche Vorgaben o.ä. sein. Dass die Grundregeln nirgendwo explizit notiert sind, haben sie mit den mathematischen Grundregeln gemein (s.u.).

[27]Vgl. hierzu Yu. Manins entsprechende Ausführungen zum Thema Beweis: "A proof becomes a proof only after the social act of 'accepting it as a proof.'" (Manin, 2010, 45).

[28]Natürlich sind die Kategorien "implizit" und "explizit" das Resultat der Sicht von heute auf den Textbefund und damit abhängig von der Überlieferungslage bzw. vom Überlieferungszufall.

[29]Dies sei deshalb betont, weil in der Diskussion der Projektgruppe vor allem der sprachliche Ausdruck in Gesetzestexten und mathematischen *Aufgaben*texten im Mittelpunkt steht, der aufgrund von deren Natur als prozedurale Texte Ähnlichkeiten aufweist: erstens im Aufbau (algorithmische Struktur, siehe Ritter (1998); bei mathematischen Lösungsverfahren mit rückbezüglichen und verweisenden Elementen), und zweitens in der Verwendung bestimmter grammatikalischer Formen (im Fall der babylonischen mathematischen Aufgebentexte Fokus auf Imperativ und Präsens). Entsprechendes findet man auch in den altbabylonischen Kochrezepten (Bottéro, 1995). In diesem Zusammenhang ist Wert auf die Feststellung zu legen, dass flektierte Verbformen im Präsens oder Imperativ in den babylonischen mathematischen Aufgabentexten keineswegs die einzigen Ausdrucksmittel zur Formulierung der einzelnen Lösungsschritte/Anweisungen sind. Häufig finden sich stattdessen

1. Nominalformen sumerischer Verben ("Partizipien"), z.B. in BM 85194 (Neugebauer (1935a, 142-193), Neugebauer (1935b, Tafeln 5, 6)), RS i 21-24: **igi** 36 ... **du$_8$-a** 01 40 *ta-mar* ; 01 40 *a-na* 36 *i-ši* 01 *ta-mar* ; 01 **g̃ar-ra** ; 25 ... *a-na* 36 *i-ši* 15 *ta-mar* ; 15 *i-na* 01 **ba-z**[**i**] 45 *ta-mar* ... ; 15 *a-na* 01 **tah-ha** 01 15 *ta-mar* "Das Inverse von 36 ... gebildet (Partizip), 01 40 siehst du ; 01 40 mit 36 multipliziere (Imperativ), 01 siehst du ; 01 hingesetzt (d.h. niedergeschrieben, Partizip) ; 25 ... mit 36 multipliziere (Imperativ), 15 siehst du ; 15 wird von 01 abgezogen (flektiert, unpersönlich), 45 siehst du ... ; 15 zu 01 hinzugefügt (Partizip), 01 15 siehst du"
2. oder auch überhaupt keine Verben. So z.B. sehr oft Minimal-Nominalsätze wie "20 **u$_3$** 20 ; 40" oder auch 20 **u$_3$** 20 ; 06 40 (wie in BM 13901, Aufbabe 18, Zeilen 41-42 im ersten Textbeispiel von Abschnitt 3); in diesem Fall also so verkürzt, dass erst durch den "Comment" (40 bzw. 06 40) klar wird, ob mit **u$_3$** "und" Addieren oder Multiplizieren gemeint ist. Auch das Ziehen einer Quadratwurzel wird m.W. nie durch eine Verbform ausgedrückt, sondern immer durch einen sumerischen Nominalsatz, wie z.B. 10 25-**e** 25 **ib$_2$-sa$_2$** "aus 625 ist 25 die Quadratwurzel" in BM 13901, Aufgabe 9, Zeile 7 im zweiten Textbeispiel von Abschnitt 3.

Es ist klar, dass diese Schritte von demjenigen, der den Algorithmus anwendet, durchzuführen sind, da sie Bestandteil des Lösungsverfahrens sind; dennoch werden sie nicht als Anweisungen (Imperativ oder Präsens) formuliert, sondern als Feststellungen ("die Wurzel aus 625 ist 25"). Nicht selten wird die "Anweisung" zur Durchführung einer Operation auch durch eine Frage, gefolgt von einem Nominalsatz, ausgedrückt So z.B. BM 96957 + VAT 6598 (Robson, 1999, 231-244), RS i 28-29: ... 01 40 *ta-mar* **en-nam ib$_2$-sa$_2$** 10 **ib$_2$-sa$_2$** "... 01 40 (= 100) siehst du. Was ist die Quadratwurzel? 10 ist die Quadratwurzel". So auch regelmäßig, wenn das Inverse einer sexagesimal irregulären Zahl benötigt wird, z.B. BM 13901, Aufgabe 10 (VS ii 11-18), Zeilen 15-16, wo 21 15 00 (= 76500) durch 01 25 (= 85) geteilt werden soll: **igi** 01 25 *u$_2$-la ip-pa-ṭa-ar mi-nam a-na* 01 25 *lu-uš-ku-un ša* 21 15 *i-na-di-nam* "Das Inverse von 01 25 (= 85) kann nicht gelöst/gefunden werden (nämlich in einer Reziprokenliste, vgl. Beispiel 1 in Fußnote 5). Was soll ich zu 01 25 setzen (d.h. dazumultiplizieren), was 21 15 00 (= 76500) ergibt?" (Die Antwort, 15 00 (= 900), wird nicht eigens genannt, sondern sofort im nächsten Schritt weiterverarbeitet: 15-**e** 30 **ib$_2$-sa$_2$** "aus 15 00 (= 900) ist 30 die Quadratwurzel"). Bleibt zu erwähnen, dass sich bisweilen natürlich auch Prekativformen sumerischer Verben finden, z.B. in dem von einzelnen akkadischen Wörtern abgesehen rein sumerisch geschriebenen Text Straßburg 367 (Frank, 1928, Text 10), VS 7-8: 01 **u$_3$** 03 **he$_2$-g̃ar** ; 01 **u$_3$** 03 **g̃ar-g̃ar** 04 ; "01 und 03 sollen addiert werden ; 01 und 03 addiert: 04". Dies findet sich in Akkadischen und Sumerischen Gesetzestexten meines Wissens nicht.

[30]So ist etwa die Phrase "5: Koeffizient des Kreises" (z.B. 05 **igi-gub** *ša$_3$* **gur$_2$** oder 05 **igi-gub** *ki-pa-tim* o.ä.; für Belegstellen siehe Robson (1999, 34-35)) in einer Koeffizientenliste gleichwertig mit der Anweisung "multipliziere das Umfangsquadrat (eines Kreises) mit 5, um den Flächeninhalt zu erhalten" in einem Aufgabentext (z.B. Böhl 1821, 13-14 (Leemans, 1951): 15 *a-na* 05 **igi-gub-ba** [**gur$_2$**] // *i-ši* 01 15 **iri gibil$_4$** *ta-mar* "15 (= das im vorangehenden Schritt ermittelte Quadrat des Kreisumfangs) mit 05, dem Koeffizienten [des Kreises] // multipliziere! 01 15, die neue Stadt (hier der gesuchte Flächeninhalt des Kreises) siehst du."). Erstere ist eine implizite Aussage darüber, wie man aus dem Umfang eines Kreises seinen Flächeninhalt berechnet — hier wird die Regel nicht als Anweisung formuliert, sondern über das Wort **igi-gub** als Regel kenntlich gemacht —, zweitere eine explizite. Ersteres setzt die Kenntnis der Bedeutung des Koeffizienten 5 im vorliegenden Kontext voraus, letzteres nicht unbedingt. Bisweilen, aber keineswegs immer, wird in einem Aufgabentext eine solche Größe wie in diesem Beispiel die 5, ausdrücklich als Koeffizient angesprochen (so wie in dem Beispiel Böhl 1821 oben). Man kann wohl sagen, dass die Regel in den Koeffizientenlisten formuliert und in den Aufgabentexten angewandt wird, womit das Auftreten hinreichend vieler derartiger Verwendungen in Aufgabentexten als Beleg für die Normgültigkeit der Regel herangezogen werden kann.

[31]Beispielsweise ist die Regel von der Additivität des Maßes nur implizit im Textbefund greifbar, dies allerdings wegen ihrer fundamentalen Bedeutung reichlich. So unter anderem in den aus ihr folgenden (abgeleiteten) Regeln zur Berechnung der Rechtecksfläche und anderer geradlinig begrenzter Flächenstücke. Z.B. des regulären 5-, 6- und 7-Ecks in der Koeffizientenliste TMS 3 (Bruins und Rutten, 1961, Text 3), 26-28: 01 40 **igi-gub** *ša₃* **sag̃**-5 // 02 37 30 **igi-gub** *ša₃* **sag̃**-6 // 03 41 **igi-gub** *ša₃* **sag̃**-7 "01 ▴ 40: Koeffizient des 5-Seits // 02 ▴ 37 30: Koeffizient des 6-Seits // 03 ▴ 41: Koeffizient des 7-Seits" (für die Interpretation siehe Vogel (1959, 69-70), Robson (1999, 48-50)); vgl. Fußnote 19. Ferner in graphischen Abbildungen, die die Zerlegung einer Figur zum Zweck der Berechnung ihres Flächeninhaltes als Summe der Teilflächenstücke zeigen (z.B. für das reguläre 6- und 7-Eck in TMS 2 (Bruins und Rutten, 1961, Text 2); Transliteration z.B. in Friberg (2007, 218)), und in den neusumerischen Feldplänen (s.o.).

[32]Dasselbe gilt für die "Methodenregeln/Schlussregeln" (siehe Ende von Abschnitt 1.2). Auch hier ist die Evidenz rein implizit, etwa im Falle der Ableitung der Regel für die Berechnung des Rauminhalts eines Kegelstumpfes durch Analogieschluss durch die "Einsortierung" der fraglichen Aufgabe in einen Kontext mit Trapezflächenberechnungen; vgl. Fußnote 25.

[33]Beachte aber Fußnote 28!

[34]Vgl. beispielsweise Ritter (1998).

[35]Davon unberührt ist die (sanktionierte) Möglichkeit der Bereitstellung und Verwendung einfacherer Werte oder von Werten reduzierter Genauigkeit, die die praktische Anwendung vereinfachen. So gibt es ein Beispiel für gerundete Werte bei den Wertäquivalenzumrechnungen, nämlich für das Produkt **babir₂ saga₁₀** ("gutes Bierbrot, guter Sauerteig o.ä.", eine Zutat beim Bierbrauen): Neben dem regelhaften exakten Wert $1\frac{39}{60}$ finden sich (selten) die mithilfe der benachbarten sexagesimal-regulären Zähler genäherten Werte $1\frac{3}{5}$ ($= 1\frac{36}{60}$) und $1\frac{2}{3}$ ($= 1\frac{40}{60}$); siehe Brunke (2011a, 17-18, Bemerkung 2.12). Im Bereich der geometrischen Koeffizienten sind hier beispielsweise die beiden (verschieden genauen) Approximationen für den Wert von $\sqrt{2}$ in den Koeffizientenlisten zu nennen: 01 ▴ 25 in TMS 3, 31 (Bruins und Rutten, 1961, Text 3) und 01 ▴ 24 51 10 in YBC 7243, 10 (Neugebauer und Sachs, 1945, 136; Tafeln 23, 49); letzterer findet sich auch (mit Zeichnung) auf der geometrischen Schülertafel YBC 7289 (Neugebauer und Sachs, 1945, 42). (Die beiden Werte können als der zweite und der gerundete dritte Schritt des "babylonischen Wurzelalgorithmus" zum Startwert 1 interpretiert werden, siehe Neugebauer und Sachs (1945, 42).)

[36]Die Tafel wurde zuerst von Thureau-Dangin (1936a, 27ff.) und Thureau-Dangin (1936b, 83-84) untersucht und nochmals in Thureau-Dangin (1938, 1-10). Eine Neubearbeitung des Textes mit detaillierten Analysen und Kommentaren gibt Neugebauer (1937, 1-14). Die hier betrachtete Aufgabe RS i 39-49 wird auch von Høyrup (2002, 108-110) behandelt.

[37]So fehlt zum Beispiel sogar die Frage nach den gesuchten Größen.

[38]Zwei Bemerkungen zur Übersetzung. (1) Der Verständlichkeit halber verwendet die Übersetzung moderne Terminologie und lässt die spezielle Art des Akkadischen Ausdrucks für bestimmte mathematische Operationen unberücksichtigt, z.B. dass "abziehen" wörtlich als "herausreißen" wiederzugeben wäre oder dass es verschiedene kontextabhängige Wörter für "addieren" und "multiplizieren" gibt. Für die grundlegenden Untersuchungen zu derartigen Fragen des sprachlichen Ausdrucks in den mathematischen Texten siehe Høyrup (1990) und Høyrup (2002), sowie für eine Extremform einer Wort-für-Wort-Übersetzung unseres Textbeispiels Høyrup (2002, 108-109). (2) In Zeile 47 gibt der Text das "Inverse von 3 (, der Anzahl der) Quadrate(n)" (Schritt Q) als 20 an, was als $\frac{20}{60}$ ($= \frac{1}{3}$) zu interpretieren und in der Übersetzung auch so wiedergegeben ist. Es folgt aus den Besonderheiten der in den babylonischen mathematischen Texten verwendeten relativen Positionsnotation der Zahlen, dass beispielsweise die Zahlen 20, $20 \cdot \frac{1}{60}$ und $20 \cdot 60$ auf die selbe Art, nämlich einfach als "20" notiert werden. Siehe zum Beispiel Friberg (1987–90, 533-537).

[39]Es ist ein charakteristisches Merkmal vieler mathematischer Aufgabentexte, dass die Aufgabenstellung in der ersten Person Singular erfolgt und die Lösung an eine zweite Person Singular (maskulin) gerichtet ist. Die einzelnen Lösungsschritte werden entweder als Anweisungen im Präsens (wie in diesem Textbeispiel ausschließlich) oder Imperativ formuliert oder unpersönlich durch Nominalformen ("Partizipien") sumerischer Verben oder durch reine Nominalsätze, vgl. Fußnote 29. Ebenso kann eine Aufgabenstellung unpersönlich eingeleitet werden: z.B. BM 96957 + VAT 6598 (Robson, 1999, 231-244), RS i 25: *šum-ma* **ka₂** 40 **kuš₃ sukud** 41 15 *ṣi₂-li-ip-tum* **dagal en-nam** "Wenn ein Tor (gegeben ist), 40 Ellen die Höhe, 41 15 die Diagonale. Die Breite ist was?" (die Angabe der Höhe ist fehlerhaft, gemeint sind 00 ▴ 40 **nindan** = 8 Ellen). Dabei kann auch bereits in der Aufgabenstellung die zweite Person direkt angesprochen werden, z.B. BM 85194, VS ii 19-20: **bad₃** 01*ᵉᵘ* **uš** 30 *mu-hu* 01 *sa₃-sum₂* 06 **sukud sahar-hi-a** ; *a-na* 1 **lu₂ uš** *pu-lu-uk* "Eine Mauer: 01 00 die Länge, 00 ▴ 30 die Oberseite, 01 die Basis, 06 die Höhe. Volumen. Für einen Mann grenze (anteilig) die Länge ab" (die Mauer hat trapezförmigen Querschnitt; Oberseite und Basis sind die beiden parallelen Seiten dieses Trapezes). Der Schüler wird also aufgefordert, das Volumen und den anteiligen Abschnitt eines Arbeiters daran (aufgrund eines Arbeitspensums) zu ermitteln.

[40]Beachte, dass die Gleichungen (ii) und (iii), also $y = x+b$ und $z = y+b$ aus der Aufgabenstellung "Quadratseite überragt Quadratseite um 10" noch gar nicht hervorgehen. Denkbar wäre hier auch z.B. $z = y = x + b$. Dass tatsächlich das oben genannte Gleichungssystem gemeint ist, folgt erst aus dem Lösungsverfahren und ganz explizit aus den Zeilen S und T.

[41]Die Erkenntnis, dass die Lösungsmethoden derartiger algebraischer Aufgabenstellungen auf "cut-and-paste geometric operations" zurückgehen, ist Jens Høyrup zu verdanken. Für eine ausführliche Darstellung mit vielen Beispielen siehe etwa Høyrup (2002) und Høyrup (2010). Ob es tatsächlich genau die im Folgenden vorgestellten Figuren waren, anhand dener man die Aufgabe gelöst oder möglicherweise die Aufgabenstellung auch konstruiert hat, bleibt offen, da der Text selbst ja keine Diagramme enthält und auch keine Angaben zu einem etwaigen "Umschichten" von Figuren oder Teilen davon macht.

[42]Oder eher, dass die vorliegende Aufgabe eine von vielen möglichen analogen Problemstellungen mit beliebigen Anzahlen von Quadraten ist. Diese Einsicht geht auf Neugebauer (1937, 13) zurück, der feststellt, dass "aus der ganzen Formulierung deutlich hervorgeht, daß hier der Fall von drei Unbekannten nur als Spezialfall einer analogen Aufgabe ... für eine beliebeige Anzahl n von Unbekannten angesehen wurde." Also liegt hier ein gewissermaßen durch n, die Anzahl der Quadrate, parametrisiertes System von Aufgaben vor, weshalb das angegebene Lösungsverfahren als (parametrisiertes oder parameterabhängiges) Regelsystem angesprochen werden kann; vgl. Fußnote 23.

[43]Vgl. Neugebauer (1937, 13).

[44]Bemerkenswerterweise findet sich hier keine Angabe der Art "2, (die Anzahl der) Quadrate"; und tatsächlich lässt sich dieses Verfahren nicht auf den Fall von mehr als zwei Quadraten verallgemeinern oder übertragen. Der Grund, dieses Verfahren dem allgemeingültigen vorzuziehen, mag darin bestanden haben, dass es einfacher ist.

[45]Vgl. Brunke (2015, 11-12).

[46]Für eine andere diagrammatische Interpretation siehe Høyrup (2002, 68-70).

[47]Die entsprechenden Ausführungen beispielsweise für die Fälle $n = 5$ oder $n = 6$ seien — um eine in der modernen mathematischen Literatur beliebte Phrase zu missbrauchen — der Leserin/dem Leser zur Übung überlassen.

Literatur

[Allotte de la Fuÿe 1915] Allotte de la Fuÿe, F. M.: Un cadastre de Djokha. In: *Revue d'Assyriologie* 12 (1915), S. 47–54

[Bottéro 1995] Bottéro, J.: *Textes culinaires Mésopotamiens.* Winona Lake, Indiana : Eisenbrauns, 1995 (Mesopotamian Civilisations 6)

[Bruins und Rutten 1961] Bruins, E. M. ; Rutten, M.: *Textes Mathémathiques de Suse.* Paris : Librairie Orientaliste Paul Geuthner, 1961 (MDP 34)

[Brunke 2011a] Brunke, H.: *Essen in Sumer – Metrologie, Herstellung und Terminologie nach Zeugnis der Ur III-zeitlichen Wirtschaftsurkunden.* München : Herbert Utz Verlag, 2011

[Brunke 2011b] Brunke, H.: Überlegungen zur babylonischen Kreisrechnung. In: *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* 101 (2011), S. 113–126

[Brunke 2012a] Brunke, H.: Ein neuer Ur III-zeitlicher Feldplan. In: Ecklin, S. (Hrsg.) ; Mittermayer, C. (Hrsg.): *Altorientalische Studien zu Ehren von Pascal Attinger.* Fribourg, Göttingen : Academic Press ; Vandenhoeck & Ruprecht, 2012, S. 39–63

[Brunke 2012b] Brunke, H.: On Mesopotamian Measure Theory. In: Geller, M. (Hrsg.) ; Geus, K. (Hrsg.): *Productive Errors: Scientific Concepts in Antiquity.* Berlin : Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, 2012, S. 9–22

[Brunke 2015] Brunke, H.: Überlegungen zu Raumerfassung und Flächenrechnung in Mesopotamien. In: *eTopoi. Journal for Ancient Studies* 4 (2015), S. 1–17. – <http://journal.topoi.org/index.php/etopoi/article/view/195/223>

[Clay 1923] Clay, A. T.: *Epic Hymns, Omens and Other Texts.* New Haven : Yale University Press, 1923 (Babylonian Records in the Library of J. Pierpont Morgan 4)

[Damerow 2001] Damerow, P.: Kannten die Babylonier den Satz von Pythagoras? In: Høyrup, J. (Hrsg.) ; Damerow, P. (Hrsg.): *Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics.* Berlin : Dietrich Reimer Verlag, 2001 (Berliner Beiträge zum vorderen Orient 19), S. 219–310

[Deimel 1909] Deimel, A.: Studien zu CT I, III, V,VII, IX und X. In: *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* 107-144 (1909)

[Delaporte 1911] Delaporte, L.: Document Mathémathique de l'époque des Rois d'Our. In: *Revue d'Assyriologie* 8 (1911), S. 131–133

[Dunham 1986] Dunham, S.: Sumerian Words for Foundation. In: *Revue d'Assyriologie* 80 (1986), S. 31–64

[Frank 1928] Frank, C.: *Straßburger Keilschrifttexte in sumerischer und babylonischer Sprache.* Berlin, Leipzig : Walter de Gruyter & Co., 1928

[Friberg 1987–90] Friberg, J.: *Mathematik.* Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie 7. 1987-90

[Friberg 2007] Friberg, J.: *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts; Manuscripts in the Schøyen Collection; Texts I.* Springer Science+Business Media, LLC, 2007

[Hilprecht 1906] HILPRECHT, H. V. ; HILPRECHT, H. V. (Hrsg.): *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur.* Philadelphia : Department of Archaeology, University of Pennsylvania, 1906 (BEA 20.1)

[Høyrup 1990] HØYRUP, J.: Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought I. In: *Altorientalische Forschungen* 17 (1990), S. 27–69

[Høyrup 2002] HØYRUP, J.: *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin.* New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2002

[Høyrup 2010] HØYRUP, J.: *L'Algèbre au temps de Babylone. Quand les mathématiques s'écrivaient sur de l'argile.* Paris : Vuibert, Adapt-Snes éditions, 2010

[Kilmer 1960] KILMER, A. D.: Two New Lists of Key Numbers for Mathematical Operations. In: *Orientalia Nova Series* 29 (1960), S. 273–308

[Leemans 1951] LEEMANS, W. F.: Un texte vieux-babylonien concernant des cercles concentriques. In: *Compte Rendu de la Seconde Rencontre Assyriologique Internationale*, 1951, S. 31–35

[Legrain 1922] LEGRAIN, L.: *The University Museum Publications of the Babylonian Section.* Bd. 13: *Historical Fragments.* Philadelphia : The University Museum, 1922

[Liverani 1990] LIVERANI, M.: The Shape of Neo-Sumerian Fields. In: *Bulletin on Sumerian Agriculture* 5 (1990), S. 147–186

[Maekawa 1992] MAEKAWA, K.: [Rezension zu Liverani (1990)]. In: *Acta Sumerologica* 14 (1992), S. 407–423

[Manin 2010] MANIN, Yu.: *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians.* 2. New York, Dordrecht, Heidelberg, London : Springer Science+Business Media, 2010 (Graduate Texts in Mathematics 53)

[Nemet-Nejat 1993] NEMET-NEJAT, K. R.: *Cuneiform Mathematical Texts as a Reflection of Everyday Life in Mesopotamia.* New Haven, Connecticut : American Oriental Society, 1993 (AOS 75)

[Neugebauer 1935a] NEUGEBAUER, O.: *Mathematische Keilschrifttexte. Erster Teil.* Berlin : Springer-Verlag, 1935 (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 3)

[Neugebauer 1935b] NEUGEBAUER, O.: *Mathematische Keilschrifttexte. Zweiter Teil.* Berlin : Springer-Verlag, 1935 (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 3)

[Neugebauer 1935–37] NEUGEBAUER, O.: *Mathematische Keilschrifttexte I-III.* Berlin : Springer-Verlag, 1935-37 (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 3)

[Neugebauer 1937] NEUGEBAUER, O.: *Mathematische Keilschrifttexte. Dritter Teil.* Berlin : Springer-Verlag, 1937 (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 3)

[Neugebauer 1969] NEUGEBAUER, O.: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften; Erster Band: Vorgriechische Mathematik.* Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1969

[Neugebauer und Sachs 1945] NEUGEBAUER, O. ; SACHS, A.: *Mathematical Cuneiform Texts.* New Haven, Connecticut : American Oriental Society and American Schools of Oriental Research, 1945 (AOS 29)

[Nissen u. a. 1991] NISSEN, H. J. ; DAMEROW, P. ; ENGLUND, R. K.: *Frühe Schrift und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient. Informationsspeicherung und -verarbeitung vor 5000 Jahren.* 2. Verlag Franzbecker und Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 1991

[Proust 2007] PROUST, C.: *Tablettes mathématiques de Nippur.* Paris : De Boccard Edition - Diffusion, 2007 (Varia Anatolica 18)

[Quillien 2003] QUILLIEN, J.: Deux cadastres de l'époque d'Ur III. In: *Revue d'histoire des mathématiques* 9 (2003), S. 9–31

[Ritter 1998] RITTER, J.: *Reading Strasbourg 368: A Thrice-Told Tale.* Berlin : Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, 1998 (Max Planck Institute Preprint 103)

[Robson 1999] ROBSON, E.: *Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education.* Oxford : Clarendon Press, 1999 (Oxford Editions of Cuneiform Texts 14)

[Robson 2008] ROBSON, E.: *Mathematics in Ancient Iraq.* Princeton : Princeton University Press, 2008

[Sallaberger 1999] SALLABERGER, W.: *Ur III-Zeit.* S. 121–414. In: ATTINGER, P. (Hrsg.) ; WÄFLER, M. (Hrsg.): *Mesopotamien. Akkade-Zeit und Ur III-Zeit*, Universitätsverlag Freiburg Schweiz, Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen, 1999 (Orbis Biblicus et Orientalis 160/3)

[Sigrist u. a. 1984] SIGRIST, M. ; OWEN, D. I. ; YOUNG, G. D.: *The John Frederick Lewis Collection, Part II.* Roma : Multigrafica Editrice, 1984 (Materiali per il vocabolario neosumerico 13)

[Thureau-Dangin 1936a] THUREAU-DANGIN, F.: L'équation du deuxième degré dans la mathématique babylonienne. In: *Revue d'Assyriologie* 33 (1936), S. 27–48

[Thureau-Dangin 1936b] THUREAU-DANGIN, F.: Textes mathématiques babyloniens. In: *Revue d'Assyriologie* 33 (1936), S. 65–84

[Thureau-Dangin 1938] THUREAU-DANGIN, F.: *Textes Mathématiques Babyloniens.* Leiden : E. J. Brill, 1938

[Vogel 1959] VOGEL, K.: *Vorgriechische Mathematik II. Die Mathematik der Babylonier.* Hannover, Paderborn : Hermann Schroedel Verlag, Verlag Ferdinand Schöningh, 1959 (Mathematische Studienhefte für den mathematischen Unterricht an höheren Schulen 2)