

# Die ersten Zahldarstellungen und die Entwicklung des Zahlbegriffs

Eine statistische Analyse der Zahlzeichen in den ältesten bekannten Schriftzeugnissen hat überraschend gezeigt, daß Verwendung und Wert dieser Zeichen noch stark vom gezählten Objekt oder von der Objektklasse abhängen. Offensichtlich kristallisierte sich erst allmählich ein abstrakter Zahlbegriff heraus.

Von Peter Damerow, Robert K. Englund und Hans J. Nissen

**D**urch frühe Einübung und Gewohnheit ist uns der Umgang mit Zahlen so vertraut, daß wir uns kaum klarmachen, welche geistige Leistung hinter der Loslösung einer Mengenbezeichnung vom gezählten Objekt selbst steckt. Daß diese Trennung nicht selbstverständlich ist, haben zuerst ethnologische Forschungen bei Naturvölkern gezeigt, die noch nicht über einen abstrakten Zahlbegriff in unserem heutigen Sinne verfügen. Dessenungeachtet gingen Altertumskundler bei der Deutung der ältesten bekannten Schriftzeugnisse – sie stammen aus der Zeit zwischen 3200 und 3000 vor Christus – bisher stets von der Existenz eines solchen Zahlbegriffs aus.

In einem ersten Artikel haben wir im letzten Monat über unsere Fortschritte bei der Entzifferung dieser Schriftdokumente berichtet, die als Archaische Texte bezeichnet werden und deren Hauptfundort die antike Stadt Uruk im südlichen Mesopotamien ist. Dabei ging es uns darum, zu zeigen, welche Aufschlüsse die neugewonnenen Erkenntnisse über die Entstehung der Schrift liefern. Hier nun soll über einen anderen Aspekt unserer Arbeit berichtet werden: die Analyse und Deutung der Zahlzeichen in diesen Texten und die Schlüsse, die sich daraus für die Entwicklung des mathematischen Denkens ergeben.

## Charakteristika der Zahlzeichen in den Archaischen Texten

Tatsächlich zeigte sich nämlich, daß zur Zeit der Schriftentstehung keineswegs, wie bislang eher unreflektiert un-

terstellt, die Vorstellung von Zahlen als allgemeinen, objektunabhängigen Größen bereits etabliert war. Der Schritt von der symbolischen Repräsentation einer Menge bestimmter Objekte zum rein gedanklichen Konstrukt der Zahl war zwar begonnen, aber noch nicht beendet. Insofern beleuchten die Zahlzeichen in den ältesten Schriftdokumenten auch ein kritisches Stadium in der kognitiven Entwicklung der Menschheit.

Grundlage unserer Analyse bildete eine Computer-Datenbank, in der wir sämtliche Archaischen Texte elektronisch gespeichert hatten. Mit vorwiegend statistischen Methoden konnten wir daran erstmals umfassend alle Aspekte des Gebrauchs der ältesten Zahlzeichen erforschen. Bevor wir aber auf die allgemeineren Gesichtspunkte des Themas zu sprechen kommen, möchten wir dem Leser die Gelegenheit geben, diese detektivische Puzzlearbeit in entscheidenden Punkten selbst nachzuvollziehen.

Die Archaischen Texte enthalten etwa 1200 Zeichen und nicht bedeutungsgleiche Zeichenvarianten (die genaue Zahl ist wegen der Schwierigkeit, solche Zeichen- gegen Schreibvarianten abzugrenzen, nur schwer zu ermitteln, zumal in den sogenannten Lexikalischen Listen, der Hauptquelle für die Zeichenidentifizierung, nur 706 Zeichen vorkommen). Darunter fallen die etwa 60 Zahlzeichen wegen der Eigenart ihrer Schreibung schon äußerlich sofort ins Auge: Sie wurden im Normalfall nicht – wie die übrigen Zeichen – mit einem spitzen Griffel in die Oberfläche des Tons eingeritzt, sondern mit einem runden Griffel senkrecht oder schräg tief darin eingedrückt und dann zum

Teil zusätzlich mit dem spitzen Griffel mit Markierungen versehen.

Da alle Verwaltungstexte Zahlzeichen enthalten, sind einige davon die bei weitem häufigsten Zeichen der Archaischen Texte. Dem Charakter dieser Texte als Wirtschaftsaufzeichnungen entsprechend sind die Zahlzeichen zugleich zentrale Informationsträger. Diese herausragende Rolle legt es nahe, ihnen bei der Entzifferung besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

## Frühere Deutungsversuche

Anders als die sonstigen Schriftzeichen blieben einige der Zahlzeichen – und zwar gerade die am häufigsten verwendeten – fast ohne jede Veränderung ihres Erscheinungsbildes Jahrhunderte in Gebrauch. Somit tauchen sie auch noch in relativ späten, nahezu vollständig lesbaren Textgruppen auf – bis in die etwa 1000 Jahre jüngere Ur-III-Periode hinein, in der sie allerdings endgültig durch keilschriftliche Entsprechungen ersetzt wurden.

Aus diesem Grunde ließen sich die vertrauten sexagesimalen Zeichen für die 1, die 10, die 60 und die 600 in den Archaischen Texten scheinbar mühelos entziffern. Die wenigen gut erhaltenen Texte, die außer einzelnen Zahlen offensichtlich – zumeist auf der Rückseite – auch deren Summe enthielten, schienen diese Identifizierungen zu bestätigen; denn nach Einsetzen der aus späteren Texten bekannten Zahlenwerte ergaben sich zumeist arithmetisch korrekte Rechnungen.

Damit schien nachgewiesen, daß die Zahlzeichen ihre spätere arithmetische



Bedeutung von vornherein besaßen. Gerade bei ihnen fühlte man sich mit der Entzifferung auf sicherem Grund und verdrängte dabei weitgehend die Tatsache, daß die scheinbare Klarheit nur für wenige der etwa 60 Zahlzeichen galt. Bei Rechnungen, die mit den angenommenen arithmetischen Bedeutungen unvereinbar waren, neigte man eher dazu, an elementare Fehler der Schreiber zu glauben, als die modernen arithmetischen Bedeutungen zu bezweifeln.

Ferner legte man den vielen Merkwürdigkeiten, durch die sich die archaischen von modernen Zahlzeichen unterscheiden, keine grundsätzliche Bedeutung bei. Daß das Zeichen für 60 beispielsweise, wenn der Text von Getreide handelte, die Bedeutung 300 annahm und das Zeichen für 10 bei Feldflächen die Bedeutung 18, wurde als wenig aufschlußreiche Ausnahmeerscheinung angesehen und kaum beachtet. Niemand vermutete auch nur, was wir heute mit Sicherheit wissen, daß

nämlich gerade die in den Archaischen Texten besonders häufigen Zahlzeichen mit dem Verwendungsbereich ihre arithmetische Bedeutung veränderten.

Adam Falkenstein von den staatlichen Museen zu Berlin berichtete 1936 erstmals über die in den frühen Grabungskampagnen gefundenen Archaischen Texte. In seiner Publikation versuchte er, mit der großen Anzahl eigenartiger Zahlzeichen dadurch fertigzuwerden, daß er sie drei verschiedenen Gruppen zuordnete; die erste interpretierte er als Sexagesimalsystem, die zweite als ein konkurrierendes Dezimalsystem und die dritte als System von Bruchzahlen.

Aber auch dann gab es noch viel zu viele Zeichen für viel zu wenige Zahlen, und Falkenstein mußte zahlreiche Zeichen, die sich graphisch unterschieden, als verschiedene Schreibungen für jeweils dieselbe Zahl deuten. Trotz dieser offenkundigen Mängel blieb Falkensteins Liste der archaischen Zahl-

zeichen für die Mathematikgeschichte etwa 40 Jahre lang nahezu unwidersprochen die authentische Quelle.

Erst Mitte bis Ende der siebziger Jahre befaßten sich der sowjetische Sumerologe Aisik Vaiman und der schwedische Mathematiker Jöran Friberg in mehreren, bis heute noch zu wenig beachteten Beiträgen erneut mit dem Problem, die Zahlzeichen der bis dahin publizierten Archaischen Texte sinnvoll zu ordnen und zu interpretieren. Obwohl sie teilweise zu unterschiedlichen Ergebnissen kamen, machten sie doch einige wichtige Entdeckungen.

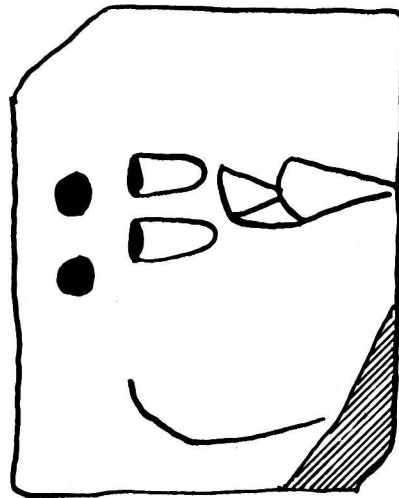
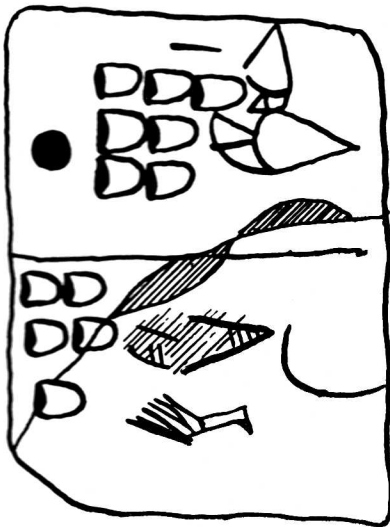
So zeigte Vaiman, daß sich die Zahlzeichen der Archaischen Texte viel plausibler in eine weit größere Zahl von Systemen einordnen lassen, als von Falkenstein angenommen. Friberg wies außerdem nach, daß die Annahme eines konkurrierenden Dezimalsystems auf einem logischen Fehler beruhte, der sich bis zur Veröffentlichung der ersten proto-elamischen Texte durch Vincent



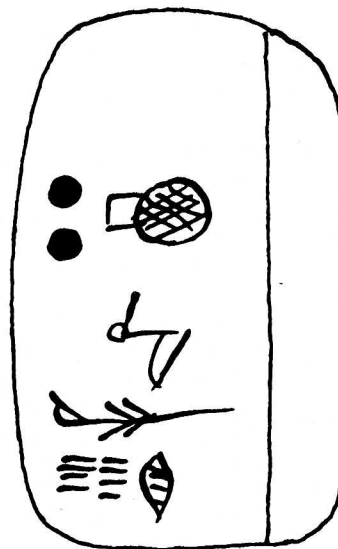
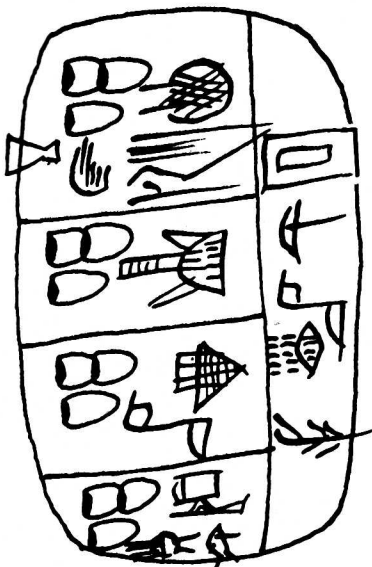
**Bild 1:** Die Verwendung unterschiedlicher Zahlzeichensysteme für verschiedene Gegenstände oder Objektklassen ist ein Charakteristikum der Zahlnotationen auf den ältesten bekannten Schriftzeugnissen, den Archaischen Tafeln aus Mesopotamien, und macht deutlich, daß sich der Zahlbegriff erst teilweise von den gezählten Objekten gelöst hatte. Der Text links ist eine Abrechnung über Milch- und Textilprodukte. Im ersten Fach der dritten Spalte sind in einem Sexagesimalsystem 1223 ( $2 \times 600$ ,  $2 \times 10$  und  $3 \times 1$ ) Einheiten eines bislang nicht identifizierten Produktes von Ziegen verzeichnet. Im Fach darunter sind in einem Bisexagesimalsystem 18120 ( $2 \times 7200$ ,  $3 \times 1200$  und  $1 \times 120$ ) Einheiten eines anderen Milchproduktes (vermutlich Käse) verbucht. Das Textfragment rechts stammt von einer Tafel mit Angaben über Feldflächen und Ge-

treidemengen. Auf der Vorderseite (oben) ist im sogenannten GAN<sub>2</sub>-System eine Fläche notiert, die – der Bedeutung der Zeichen in späteren Perioden nach zu urteilen – etwa 260 Hektar umfaßt. Auf dieser Seite standen vermutlich mehrere derartige Flächenangaben gemeinsam mit Ernteerträgen. Auf der Rückseite (unten) ist die Gesamtsumme dieser Erträge zum größten Teil erhalten. Sie ist im ŠE-System verzeichnet, das speziell zur Angabe von Getreidemengen diente, und umfaßt 180161 ( $3 \times 54000$ ,  $2 \times 9000$ ,  $5 \times 30$ ,  $2 \times 5$  und  $1 \times 1$ ) Einheiten eines Hohlmaßes von etwa vier Litern (das sind insgesamt mehr als 7200 Hektoliter). Die Verwaltung solcher, die Größenordnungen einer dörflichen Wirtschaftsweise weit übersteigenden Produktmengen spielte vermutlich eine entscheidende Rolle bei der frühen Entwicklung des arithmetischen Denkens.





W 20676,2



W 15897,c21

Bild 2: Arithmetische Mehrdeutigkeit ist eine der merkwürdigsten Eigenschaften der Zahlzeichen auf den frühesten bekannten Schriftzeugnissen, den etwa 5000 Jahre alten Archaischen Texten aus Mesopotamien. Diese Zeichen ändern, wie die abgebildeten Texte beweisen, mit dem Anwendungsbereich ihre arithmetische Bedeutung. Bei beiden Texten ist auf der Rückseite die Summe der Eintragun-

gen der Vorderseite notiert. Bei der oberen Tafel, auf der Biertöpfe verzeichnet sind, werden 17 Einheiten und 5 Einheiten addiert. Das Resultat sind 22 Einheiten. In diesem Fall hat das Zeichen • den zehnfachen Wert des Zeichens ▢. Beim unteren Text werden viermal 3 Einheiten eines unbekannten Getreideprodukts addiert. Das Resultat sind 12 Einheiten. Hier hat das Zeichen • den Wert von 6 ▢.

Scheil im Jahre 1905 zurückverfolgen läßt (siehe „Zahlen und Maße in den ersten Schriftzeugnissen“ von Jöran Friberg in Spektrum der Wissenschaft, April 1984). Der Fehlschluß hatte sich durch häufige, ungeprüfte Übernahme so verfestigt, daß als gesichertes Wissen galt, was durch eine sorgfältigere Analyse der in den Texten enthaltenen Summenbildungen leicht hätte widerlegt werden können.

Dies war im wesentlichen die Lage, als wir uns 1983 entschlossen, die Zahlzeichen der Archaischen Texte auf der Basis aller ausgegrabenen Tafeln von Grund auf neu zu analysieren. Das Vor-

haben war ein erster Test, ob sich der technische Aufwand, zur Entzifferung und Deutung der Archaischen Texte erstmals und in großem Umfang moderne Techniken der Datenverarbeitung heranzuziehen, auszahlen würde. Als gemeinsames Projekt des Seminars für Vorderasiatische Altertumskunde der Freien Universität Berlin und des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung war auf einem Siemens-Großrechner der Zentraleinrichtung für Datenverarbeitung der Universität eine Datenbank aufgebaut worden, die nun in einer noch vorläufigen Form für erste Auswertungen zur Verfügung stand.

## Regeln der Zeichenverwendung

Für die Analyse wählten wir einen grundsätzlich anderen Weg, als er bis dahin üblich gewesen war. Man hatte immer versucht, möglichst direkt aus den wenigen Texten, die Rechenoperationen enthalten, die Zahlbedeutungen zu ermitteln und die so bestimmten Werte dann zur Interpretation jener Texte heranzuziehen, aus denen sich die arithmetischen Bedeutungen nicht unmittelbar ableiten lassen.

Nun hat jedoch jedes Rechnen zwei grundverschiedene Ebenen. Zunächst einmal besteht es einfach darin, mechanisch Regeln auf bestimmte Notationen anzuwenden. Erst in zweiter Linie schließt es auch ein bestimmtes numerisches Verständnis ein, durch das den Regeln und den Ergebnissen ihrer Anwendung eine bestimmte Bedeutung beigelegt wird. Statt nun sofort nach diesem numerischen Verständnis zu fragen, versuchten wir zunächst, ohne uns sonderlich um die Bedeutung zu kümmern, möglichst viel über die Regeln herauszufinden, nach denen mit den Zeichen hantiert wurde.

Dabei erwiesen sich die Hunderte von aus jedem Zusammenhang gerissenen und deshalb scheinbar wertlosen Fragmenten mit Zahlnotationen plötzlich als überaus reiche Informationsquelle. Unser Verfahren, aus den Fragmenten die Regeln für die Handhabung der Zahlnotationen zu rekonstruieren, ist einem Puzzlespiel mit dem Computer zu vergleichen. Jede erschlossene oder vermutete Regel wurde mit Hilfe des Rechners sofort am gesamten Textbestand überprüft. Wieviele Beispiele ließen sich finden, die sie stützten? Wieviele Ausnahmen oder Gegenbeispiele gab es?

Die Mehrdeutigkeit der Zeichen, die in der Vergangenheit so oft Irritationen hervorgerufen hatte, störte dabei kaum, da nur die Regeln der Zeichenverwendung und nicht die Bedeutungen der Zeichen untersucht wurden.

Drei sehr allgemeine Regeln sind kennzeichnend für die Darstellung von Quantitäten durch die archaischen Zahlzeichen: Wir nennen sie Korrespondenz-, Ersetzungs- und Anordnungsregel und wollen hier kurz auf sie eingehen, ehe wir uns spezielleren Regeln zuwenden.

Gemäß der Korrespondenzregel werden Quantitäten durch Zeichenwiederholungen dargestellt. Dabei wird das Zeichen für die Zähl- oder Meßeinheit so oft wiederholt, wie diese Einheit in der Quantität enthalten ist. Dies geschieht jedoch nur bis zu einer bestimmten, vom Kontext abhängigen Grenze.

Überschreitet die darzustellende Quantität diese Grenze, so ersetzt – gemäß der Ersetzungsregel – ein höherrangiges Zeichen jeweils eine bestimmte Anzahl von Wiederholungen des niederrangigen Zeichens. Dabei wird das höherrangige Zeichen selbst wie eine Einheit behandelt und entsprechend der Korrespondenzregel erforderlichenfalls wiederholt.

Die Anordnungsregel schließlich besagt, daß die Zeichen einer Zahlnotation, beginnend mit den Zeichen mit dem höchsten Rang, stets in der Reihenfolge ihrer Rangordnung notiert werden.

Diese Regeln sind seit langem wohl bekannt und wurden wohl als so trivial empfunden, daß eine nähere Untersuchung nicht als lohnend erschien. Deutet man die Zeichen als Symbole für Zahlen, so wirkten die Regeln als Bündelungsregeln eines Systems der Zahlendarstellung ja auch sehr plausibel. Stellte etwa ein bestimmtes Zeichen die 1 und ein anderes die 6 dar, so konnte notwendigerweise das erste Zeichen höchstens fünfmal wiederholt werden.

Andere Erklärungen sind allerdings denkbar. Das erste Zeichen könnte zum Beispiel ein kleines Meßgefäß darstellen und das zweite ein größeres mit dem sechsfachen Volumen. Auch in diesem

Falle ist erklärlich, warum das kleinere Zeichen nur fünfmal wiederholt wurde.

Wir ließen solche Fragen zunächst offen und untersuchten statt dessen vor allem für verschiedene Verwendungszusammenhänge, wie oft die einzelnen Zeichen maximal wiederholt wurden. Daraus erschlossen wir den jeweiligen Wert des höherrangigen Zeichens und ermittelten, wie dieser Wert vom Kontext abhing.

### Summenbildungen

Verhältnismäßig einfach läßt sich der „Wert“ eines Zeichens feststellen, wenn eine Summenbildung vorliegt, bei der dieses Zeichen eine bestimmte Anzahl des nächstniedrigeren Zeichens ersetzt. Der Text W 20676,2 (Bild 2 oben) enthält beispielsweise auf der Rückseite die Summe der beiden Eintragungen auf der Vorderseite. Die Rechnung lautet:

$$1 \bullet 7 \text{D} + 5 \text{D} = 2 \bullet 2 \text{D}$$

Daraus kann man schließen, daß zehn  $\text{D}$  durch ein  $\bullet$  ersetzt worden sind, oder:

$$1 \bullet = 10 \text{D}$$

Es ist allerdings nicht einfach festzustellen, in welchem Umfang sich die so erzielten Ergebnisse verallgemeinern

lassen; denn die archaischen Zahlzeichen werden grundsätzlich arithmetisch mehrdeutig verwendet. So enthält der Text W 15897,c21 (Bild 2 unten) die Summenbildung

$$3 \text{D} + 3 \text{D} + 3 \text{D} + 3 \text{D} = 2 \bullet$$

Nach dem vorangegangenen Beispiel wäre als Ergebnis  $1 \bullet 2 \text{D}$  zu erwarten. Die Summe  $2 \bullet$  bedeutet, daß das Zeichen  $\bullet$  im vorliegenden Kontext nicht den zehnfachen, sondern nur den sechsfachen Wert des Zeichens  $\text{D}$  repräsentiert.

Doch nicht nur die mit den Zusammenhängen wechselnden arithmetischen Bedeutungen der Zahlzeichen bewirken, daß die Summenbildungen nicht immer so einfach zu entschlüsseln sind wie in den angeführten Beispielen. Werden mehrere, komplizierte Zahlnotationen addiert und entsprechend vielfältige Austauschoperationen vorgenommen, so gestaltet sich das Problem zu einem verzwickten Zahlenrätsel, das nicht selten mehrere mögliche Lösungen hat.

Die Summenbildung im Text ATU 1 Nr. 311 (Bild 3) läßt beispielsweise nur den Schluß auf die nachfolgende Gleichung zu:

$$1 \text{Z} + 1 \text{O} + 4 \text{M} = 1 \text{D}$$

Diese Gleichung enthält vier Unbekannte und daher an sich viele Lösungen. In diesem Falle freilich ermöglichen es glückliche Umstände, die Größenbeziehungen zwischen den Zeichen dennoch zu ermitteln. So ist aus der Notationsweise die Größenanordnung der Zeichen zu ersehen. Wir wissen ferner, daß die höherwertigen Zahlzeichen in der Regel ganzzahlige Vielfache der niederwertigeren repräsentieren. Schließlich muß wegen der dreifachen Wiederholung des Zeichens  $\text{M}$  auf der Tafel das Zeichen  $\text{O}$  mindestens den vierfachen Wert haben. Aus diesen Bedingungen lassen sich die folgenden Größenbeziehungen zwingend erschließen:

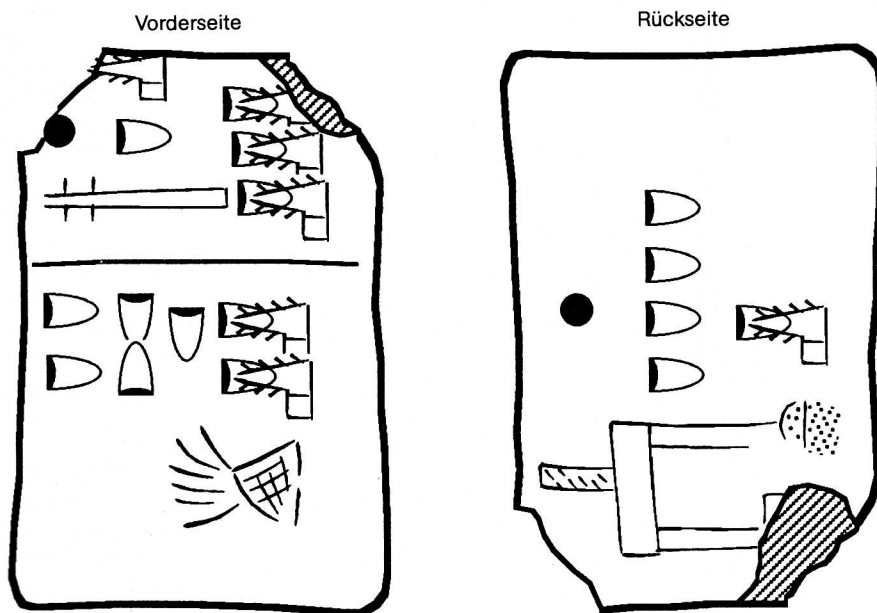
$$1 \text{D} = 2 \text{Z}$$

$$1 \text{Z} = 2 \text{O}$$

$$1 \text{O} = 4 \text{M}$$

Generell freilich sind die Möglichkeiten, die Werte der Zahlzeichen aus Summenbildungen zu bestimmen, schon aus dem einfachen Grund sehr begrenzt, daß sich nur auf wenigen der Archaischen Texte Summenbildungen befinden und von diesen wiederum nur ein Bruchteil gut genug erhalten ist, daß sich alle Summanden entnehmen lassen. Es gibt jedoch einen anderen, sehr viel direkteren Weg, Rückschlüsse auf die Werte der Zeichen zu ziehen. Ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Experiment möge dies verdeutlichen.

Bekanntlich gibt es nicht nur Würfel mit sechs Flächen, sondern beispielsweise auch solche in Form eines Tetra-



ATU 1 Nr. 311

Bild 3: Manchmal lassen sich auch aus algebraisch mehrdeutigen Summenbildungen mit Hilfe plausibler Zusatzannahmen die Größenverhältnisse zwischen den einzelnen Zeichen ermitteln. Dies ist hier beispielhaft an der Entzifferung eines der archaischen Zahlensysteme, des sogenannten EN-Systems, gezeigt. Der Text ATU 1 Nr. 311 enthält die Summation  $1 \bullet 1 \text{D} 3 \text{M} + 2 \text{D} 1 \text{Z} 1 \text{O} 2 \text{M} = 1 \bullet 4 \text{D} 1 \text{M}$ , die als Gleichung mit vier Unbekannten viele Lösungen hätte. Aus der Reihen-

folge der Zeichen in den Notationen läßt sich jedoch die Größenanordnung entnehmen. Ferner kann man davon ausgehen, daß die höherwertigen Zeichen ganzzahlige Vielfache der niederwertigeren sind. Schließlich gibt die maximale Anzahl der Wiederholungen eines Zeichens an, wie groß der Wert des nächsthöheren Zeichens mindestens sein muß. Aus diesen drei Zusatzbedingungen lassen sich algebraisch eindeutig die in Bild 6 angegebenen Beziehungen zwischen den vier Zeichen erschließen.



eders mit nur vier Flächen. Nehmen wir einmal an, jemand teilte uns die sukzessiven Ergebnisse des Würfels mit, ohne uns zu sagen, wieviele Flächen sein Würfel hat.

Anfangs wüßten wir wenig über die Zahl der Flächen. Klar wäre nur, daß sie mindestens so groß sein muß wie die höchste gewürfelte Zahl. Mit jedem Wurf jedoch würde es unwahrscheinlicher, daß nicht auch die höchste Zahl einmal geworfen wurde, und schließlich wüßten wir mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit, wieviele Flächen der Würfel tatsächlich hat. Ja, wir würden sogar bemerken, wenn der Würfel unter bestimmten Bedingungen gegen einen andersartigen vertauscht würde.

## Statistik als Entzifferungsmethode

Die Zahlnotationen der Archaischen Texte lassen sich in ähnlicher Weise als Träger von Informationen über den Wert der verwendeten Zahlzeichen deuten. Jedes Fragment mit der Wiederholung eines Zeichens gibt beispielsweise darüber Aufschluß, wie oft dieses Zeichen in einem bestimmten Zusammenhang mindestens wiederholt werden kann. Mit jedem Fragment erhöht sich zugleich die Wahrscheinlichkeit, daß die maximale Anzahl möglicher Wiederholungen auch tatsächlich einmal vorkommt.

Diese Überlegung liefert beispielsweise einen einfachen statistischen Beweis dafür, daß die herkömmliche Annahme, es habe in Mesopotamien neben einem Sexagesimalsystem zunächst ein konkurrierendes Dezimalsystem gegeben, falsch ist. Wir erhalten so eine zuverlässige und unabhängige Bestätigung von Jöran Friberg's eingangs erwähnten, aus Summenbildungen, also auf andere Weise erzielttem Resultat.

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen. Das Sexagesimalsystem beruht auf den Größenrelationen:

$$10_{\mathbb{D}} = \bullet$$

und  $6\bullet = \mathbb{D}$ .

Für das vermutete Dezimalsystem müßten dagegen die folgenden Größenrelationen gelten:

$10_{\mathbb{D}} = \bullet$

und  $10\bullet = \bullet$ .

Ist in einer Zahlnotation das Zeichen

- mehr als fünfmal wiederholt, ohne daß es durch das nächsthöhere Zeichen ersetzt wurde, so kann diese Zahlnotation nicht zum Sexagesimalsystem gehören.

Das bedeutet aber nicht, daß sie deswegen gleich ein Dezimalsystem verkörperte. Diese vorschnelle Annahme

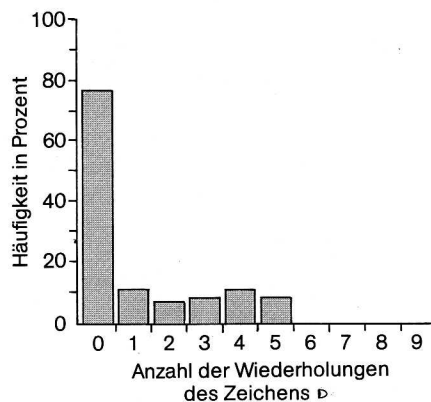
wird durch die Statistik klar widerlegt. Die erwähnte Datenbank aller Archaischen Texte aus Uruk und Djemdet Nasr sowie zeitgleicher Texte von anderen Fundorten verzeichnet 46 Notationen, die das Zeichen • in mehr als fünffacher Wiederholung und zugleich das Zeichen ▯ aufweisen; in keiner davon ist ▯ mehr als fünfmal wiederholt (Bild 4). Die statistische Wahrscheinlichkeit, daß dies das Ergebnis eines Zufalls ist, beträgt nur etwa 0,02 Prozent.

Die Statistik widerspricht also den Größenbeziehungen eines Dezimalsystems. Sie belegt vielmehr Größenrelationen eines Systems, das wir wegen der Verwendung für Getreide (wiedergegeben durch das Zeichen SE) als SE-System bezeichnet haben:

6 D = ●

und  $10 \bullet = \bullet\bullet$ .

Dieses und ähnliche statistische Verfahren erlaubten, systematisch zu überprüfen, inwieweit sich die an einzelnen



**Bild 4:** Die Statistik liefert die bei weitem aussagekräftigste Methode zur Entzifferung von Zahlzeichen. Während nämlich nur wenige Tafeln mit eindeutig auswertbaren Summenbildungen existieren, läßt sich das gesamte vorliegende Textmaterial in eine statistische Analyse einbeziehen. Als Beispiel für die Leistungsfähigkeit solcher Analysen ist hier der statistische Beweis gezeigt, daß das Zeichen  $\bullet$  je nach Anwendungsbereich seinen Wert änderte. Im Sexagesimalsystem gelten die Beziehungen  $1\text{D} = 10 \bullet$  und  $1 \bullet = 6\text{D}$ . In diesem System kann das Zeichen  $\bullet$  also höchstens fünfmal wiederholt werden. Tatsächlich taucht es jedoch auf einer Reihe von Tafeln, auf denen Getreidemengen verzeichnet sind, mehr als fünfmal in einer Gruppe auf. Nach der statistischen Analyse, deren Ergebnis dieses Balkendiagramm zeigt, kommt in all diesen Fällen das nächstniedrigere Zeichen  $\text{D}$ , das im Sexagesimalsystem an sich bis zu neunmal wiederholt werden kann, niemals häufiger als fünfmal wiederholt vor. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies ein Zufall ist, beträgt nur etwa 0,02 Prozent. In diesem sogenannten ŠE-System, das vorwiegend für Getreide verwendet wurde, gilt also  $1\text{D} = 6 \bullet$  (und  $1 \bullet = 10\text{D}$ .) Daß in Texten mit mehr als fünffacher Wiederholung von  $\bullet$  das Zeichen  $\text{D}$  überdurchschnittlich oft ganz fehlt, läßt sich mit der Tendenz erklären, bevorzugt runde Zahlen anzugeben.

Schlüsseltexten gewonnenen Ergebnisse verallgemeinern lassen. Aus den mehr als 6500 bekannten Zahlnotationen die Regeln ihrer Handhabung zu bestimmen, war vor allem deshalb ein so kompliziertes Puzzlespiel, weil ein Einzelergebnis nur selten weitreichende Schlußfolgerungen zuläßt. Erst mit dem Fortgang der Arbeit fügten sich die verschiedenen Einzelergebnisse allmählich zu einem konsistenten Gesamtbild zusammen.

## Die Entzifferung der Kalendernotierungen


Ein Beispiel, wie verschiedenartige Informationen miteinander kombiniert werden müssen, um ein solches Puzzle zu lösen, bietet die Entzifferung der Kalendernotierungen ( $U_4$ -System, Bild 6). Schon lange war vermutet worden, daß Kombinationen des Zeichens  $U_4$  (  $\vartheta$  ) mit Zahlzeichen Kalenderangaben darstellten. Die Hypothesen über die genaue Bedeutung gingen jedoch weit auseinander. Vaiman hatte, wie sich nun herausstellte, als einziger die richtige Lösung vermutet:

$$\delta = 1 \text{ Tag}$$

⑧ = 1 Monat

 = 1 Jahr

Den Beweis fanden wir in den in Bild 5 zusammengestellten Texten. Kombiniert man die darin enthaltenen Indizien, so läßt sich nicht nur die Bedeutung der Kalendernotierungen entschlüsseln, sondern auch erschließen, daß schon in den Archaischen Texten der Verwaltungsmonat mit 30 Tagen und das Verwaltungsjahr mit 360 Tagen gerechnet wird.

Eigentlich hätte der Text PI 84 (Bild 5) bereits die Lösung bringen können, wenn nicht eines der Zeichen sehr irreführend geschrieben wäre. Er enthält die Kalendernotierung , die als „1 Monat 5 Tage“ zu lesen ist, obwohl sie wegen des Zeichens oben rechts, das mehr einem • als einem ∩ ähnelt, eher wie „1 Monat 14 Tage“ aussieht. Aus wievielen Tagen besteht nun ein Monat?

Aufschluß gibt die hinter der Angabe des Zeitraums notierte Getreidemenge  $3 \supset 2 \supset 1 \text{ } \mathbb{E}$  (ŠE-System, vergleiche Bild 6). Sie erweist sich mit Hilfe der von uns ermittelten Größenbeziehungen als das 35fache der dem Zeichen  $\mathbb{E}$  entsprechenden Menge. Stünde das Zeichen für eine Tagesration, so müßte „1 Monat 5 Tage“ also 35 Tage bedeuten und der Monat 30 Tage lang sein.

Doch, wie gesagt, war der Zeitraum auf diesem Text zunächst falsch gelesen worden. Die tatsächliche Entzifferung der Kalendernotierungen verlief dann

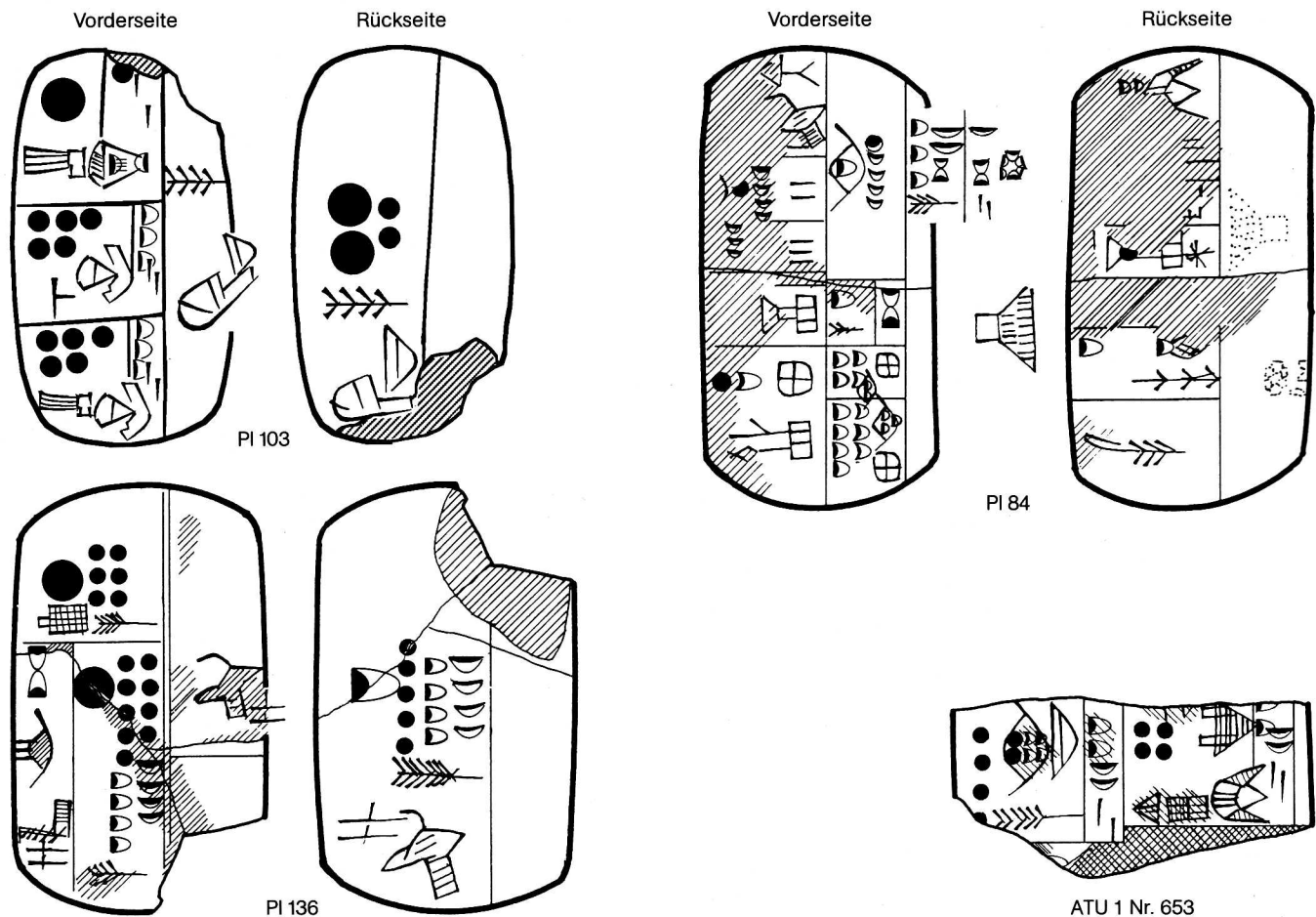


Bild 5: Die Entzifferung der Kalendernotierungen gelang in einem detektivischen Puzzlespiel auf der Basis der vier hier abgebildeten Texte. Auf der Tafel PI 103 sind 6 Getreidemengen verbucht, die auf der Rückseite summiert werden. Dieser Text zeigt, daß sich das Zeichen  $\text{𐎶}$ , dessen genaue Bedeutung unbekannt ist, jeweils neben einer Getreidemenge befindet, die genau 10 Prozent der davorstehenden Menge ausmacht. Die stark beschädigte Tafel PI 84 ist möglicherweise eine Abrechnung über Futtergetreide für Schafe. Im ersten Fach der zweiten Spalte findet sich die Angabe „1 Monat 5 Tage“, dahinter eine Getreidemenge, die gerade das 35fache des Zeichens  $\text{𐎶}$  beträgt, darauffolgend wiederum (gerundet) eine 10prozentige Zugabe. Nimmt man an, daß das Zeichen  $\text{𐎶}$  für eine Tagesration steht, ergibt sich eine Monatslänge von 30 Tagen. Dieser Schluß war allerdings zunächst nicht so sicher, weil

die Kalendernotation auf dieser Tafel nicht eindeutig geschrieben ist und sich auch als „1 Monat 14 Tage“ lesen läßt. Die Tafel PI 136, eine Abrechnung über Getreide mit unbekannter Zweckbestimmung, enthält im zweiten Fach der ersten Spalte unter dem Zeichen  $\text{𐎶}$  die Angabe „3 Jahre“ ( $\text{𐎶}$ ) und im darauffolgenden Fach eine Getreidemenge, die genau die Menge  $3 \times 360 \text{ 𐎶}$  zuzüglich 10 Prozent beträgt. Danach ist das Jahr also mit 360 Tagen gerechnet worden. Das Textfragment auf der Tafel ATU 1 Nr. 653 beginnt mit einer Getreidemenge, dann folgt die Angabe „24 Monate“ und schließlich das Zeichen  $\text{𐎶}$  mit der Bedeutung „(Getreide-)Ration“, von dem aus anderen Texten bekannt ist, daß es für  $1/3 \text{ 𐎶}$  Getreide steht. Die angegebene Getreidemenge beträgt  $24 \times 30 \times 1/3 \text{ 𐎶}$ , was die obige Vermutung eines 30tägigen Monats bestätigt. Die 10prozentige Zugabe ist hier wieder getrennt aufgeführt.

etwas komplizierter. Sie war eng mit der Deutung numerischer Funktionen der Zeichen  $\text{𐎶}$  und  $\text{𐎶}$  verknüpft, die mit den Kalendernotierungen selbst gar nichts zu tun haben.

Im Text PI 103 (Bild 5) werden mit dem Zeichen  $\text{𐎶}$  Getreidemengen gekennzeichnet, die gerade 10 Prozent der voranstehenden Getreidemengen ausmachen. Das könnte natürlich ein Zufall sein; andere Texte bestätigten jedoch diese Beobachtung. Unter anderem gilt dies für den bereits erwähnten Text PI 84. Die mit dem Zeichen  $\text{𐎶}$  versehene Notation  $1 \text{ 𐎶 } 1 \text{ 𐎶 } 1 \text{ 𐎶}$ , das sind  $3\frac{1}{3}$  Tagesrationen, liegt so dicht bei 10 Prozent von 35 Rationen, daß die Differenz leicht als Rundungsfehler zu erklären ist.

Zum Schlüsseltext für die Entzifferung wurde nun der Text PI 136 (Bild

5), der das Zeichen  $\text{𐎶}$  mit der Bedeutung „3 Jahre“ enthält. Wir verfügten davon zunächst nur über eine sehr schlechte Kopie und eine Photographie. Aufgrund dieser Quellen schien es nicht ausgeschlossen, daß das Zeichen  $\text{𐎶}$  neben der Kalendernotierung für „3 Jahre“ gerade eine Tagesration angab und die hinter der Notation aufgeführte Getreidemenge sich als  $3 \times 360$  Tagesrationen errechnete, wonach ein Jahr 360 Tage gezählt hätte.

Einer von uns (Englund) untersuchte die Frage im Irak-Museum in Bagdad am Original des Textes. Dabei zeigte sich, daß die im Text angegebene Menge größer war, was die Schlußfolgerung über die Jahreslänge zu widerlegen schien. Als er jedoch den Text vorsichtig säuberte, stellte er fest, daß die Getreidemenge exakt um 10 Prozent

über dem zu erwartenden Wert liegt – um eben jene 10 Prozent, die im Text PI 84 gesondert aufgeführt sind.

Das Textfragment ATU 1 Nr. 653 (Bild 5), das zuvor keinen Sinn ergeben hatte, lieferte schließlich eine glänzende unabhängige Bestätigung dieser Deutung. Wir wußten bereits aus anderen Texten, daß das Zeichen  $\text{𐎶}$ , das Bild einer Rationenschale, eine kleinere Ration repräsentiert – zumeist eine Getreidemenge von  $1/3 \text{ 𐎶}$ . Dabei handelte es sich wahrscheinlich um die Tagesration der von der Tempel- und Palastverwaltung abhängigen Arbeitskräfte der untersten Kategorie, die nach unserer Größenbestimmung für das SE-System mit 0,6 bis 0,8 Litern in der Nähe des Existenzminimums lag.

Nach der Kalendernotierung des Textes müßte dieser solche kleinen Ratio-



nen für „24 Monate“ oder  $24 \times 30$  Tage verzeichnen. In der Tat ergibt im ŠE-System  $24 \times 30 \times \frac{1}{2} \approx$  gerade die Menge von  $4 \bullet$ , die vor der Kalendernotierung verbucht ist. Ferner entspricht die in einem getrennten Fach zusammen mit dem Zeichen  $\#$  notierte Getreidemenge  $2 \triangleright 2 \approx$  gerade 10 Prozent dieser Menge.

### Zahlzeichensysteme mit spezifischen Anwendungsbereichen

Die ermittelten Regeln über die Verwendung der Zeichen waren zum großen Teil mit den gängigen Zuschreibungen von Zahlenwerten vereinbar. Daneben fanden wir jedoch auch Regeln, die nicht mit der üblichen Deutung der Zeichen als Zahlzeichen eines einheitlichen Systems in Einklang standen.

Beispielsweise gibt es drei Zeichen, denen die Zahlenwerte 60, 120 und 600 zugeschrieben werden. Wir fanden nun die seltsame Regel, daß die Zeichen für 120 und 600 niemals zusammen in einer Notation vorkommen. Taucht das Zeichen für 120 auf, so ist es manchmal mehr als fünffach wiederholt, ohne durch das Zeichen für 600 ersetzt zu werden. Enthält eine Zahlnotation dagegen das Zeichen für 600, so wird das Zeichen für die 60 gleichfalls mehrfach wiederholt und nicht durch das Zeichen für 120 ersetzt.

Diese und ähnliche Merkwürdigkeiten fanden durch das Gesamtergebnis unseres Puzzlespiels eine plausible Erklärung. Wir fanden heraus, daß sich die mehr als 6500 Zahlnotationen fast vollständig einer gewissen Anzahl verschiedenartiger Zahlzeichensysteme zuordnen lassen, in denen die gleichen Zeichen zum Teil ganz unterschiedliche numerische Bedeutungen haben. So tauchen die Zeichen für 120 und für 600 einfach deshalb niemals gemeinsam auf, weil sie zu verschiedenen Zeichensystemen gehören. Eine eingehende Analyse zeigte, daß die verschiedenen Systeme mit wenigen Ausnahmen sehr strikt gegeneinander abgegrenzte Verwendungsbereiche haben.

Die fünfzehn ermittelten Systeme lassen sich fünf Grundsystemen zuordnen (Bild 6): dem Sexagesimalsystem, dem Bisexagesimalsystem, dem ŠE-System, dem GAN<sub>2</sub>-System und dem EN-System (ŠE, GAN<sub>2</sub> und EN sind die konventionellen Lesungen von Zeichen, die mit den Systemen in Verbindung stehen). Zu einigen dieser Grundsysteme gibt es abgeleitete Systeme mit gleichen arithmetischen Gliederungen, aber anderen Verwendungsbereichen und veränderter graphischer Form der Zeichen. Hinzu kommen einige Systeme

wie das U<sub>4</sub>-System für die Kalendernotierungen, bei denen Zahlzeichen mit Schriftzeichen kombiniert und dadurch mit speziellen metrologischen Bedeutungen verknüpft werden.

Schließlich gibt es Schriftzeichen und Kombinationen von Schrift- und Zahlzeichen, die überwiegend bestimmte Gegenstände oder Sachverhalte zum Ausdruck bringen (also ideographischen Charakter haben), zum Teil jedoch auch eine numerische Bedeutung besitzen. Beispielsweise existieren Kombinationen von Zeichen für bestimmte Herdentiere mit Zahlzeichen, durch welche die Bezeichnung des Tieres mit der Angabe seines Alters zu einem einzigen Zeichen verschmilzt. Die Übergänge zwischen Numerik, Metrologie und Ideographie sind in den Archaischen Texten fließend, so daß Unterscheidungen zwischen Zahlzeichen, Maßbezeichnungen und Schriftzeichen also immer auch eine gewisse Willkür anhaftet.

Die Abgrenzung der Anwendungsbereiche für die verschiedenen Systeme folgte keinen erkennbaren generellen Regeln. Das Sexagesimalsystem und das Bisexagesimalsystem sowie die davon abgeleiteten Systeme waren Systeme für diskrete Objekte, wobei das Sexagesimalsystem den weitaus vielfältigeren Anwendungsbereich hatte.

Das Bisexagesimalsystem fand vor allem bei Getreideprodukten Verwendung, sofern diese nicht in Hohlmaßen gemessen und im ŠE-System notiert wurden. Daneben war es auch für ein bestimmtes Milchprodukt sowie eine bestimmte Art von Fisch üblich.

Die abgeleiteten Systeme dienten sehr spezifischen inhaltlichen Kennzeichnungen: das vom Sexagesimalsystem abgeleitete System S' beispielsweise in Dokumenten aus der Viehhaltung wahrscheinlich zur Kennzeichnung der im laufenden Rechnungsjahr geschlachteten Tiere sowie in Texten aus der Bierproduktion oder -verteilung zur Kennzeichnung einer bestimmten Biersorte. Das ŠE-System und die davon abgeleiteten Systeme bezeichneten Hohlmaße für Getreide und Getreideprodukte, wobei die verschiedenen Systeme wahrscheinlich verschiedene Getreidearten symbolisierten. Das GAN<sub>2</sub>-System diente der Angabe von Feldflächen. Der Verwendungsbereich des EN-Systems ist unbekannt.

Wir haben deutliche Hinweise auf die Existenz weiterer, uns unbekannter archaischer Zahlzeichensysteme. Schon die Tatsache, daß 25 der 26 Zeugnisse des EN-Systems an einer einzigen Stelle gefunden worden sind, mahnt zur Vorsicht, was die Vollständigkeit unserer Kenntnis angeht. Wäre an dieser

Stelle zufällig nicht gegraben worden, besäßen wir nur ein kleines Fragment mit dem Zeichen  $\boxplus$ , das keinen Aufschluß über das zugrundeliegende System gegeben hätte.

Zehn der Zahlzeichen unserer 60 Zeichen umfassenden Liste tauchen in keinem der ermittelten Systeme auf. Die Gründe dafür sind unterschiedlich. Drei der Zeichen beispielsweise finden sich nur auf einer kleinen Tafel, die wir für die Krakelei eines der Schrift noch weitgehend unkundigen Schülers halten. Bei vier anderen sind wir uns nicht sicher, ob es sich nicht vielleicht um Schreibvarianten anderer Zahlzeichen oder aber überhaupt nicht um Zahlzeichen handelt. Zumindest bei zweien der zehn Zeichen, nämlich den Zeichen  $\boxplus$  und  $\boxminus$ , sind wir nach der Art ihrer Verwendung jedoch überzeugt, daß sie zu zwei weiteren Systemen gehören, über die wir nur deshalb nichts Näheres wissen, weil keine aussagekräftigen Texte überliefert sind.

### Das Fehlen eines abstrakten Zahlbegriffs

Nach dem Gesagten erhebt sich natürlich die Frage, in welchem Sinne man diese arithmetischen Notierungen mit ihren komplizierten und zum Teil an spezifische Inhalte gebundenen Regeln der Verwendung, ihren vielfältigen inhaltlichen Nebenbedeutungen und den unscharfen Grenzen zwischen ihren operativen und ihren ideographischen Funktionen (ihren Funktionen als Rechengrößen und als Symbolen für konkrete Objekte) überhaupt als Darstellungen von „Zahlen“ ansehen kann. Welche Entwicklungsstufe stellen sie dar in einer Kultur, die 1000 Jahre später als erste Kultur der Erde eine hochentwickelte Mathematik hervorgebracht hat?

Bislang herrschte die Auffassung vor, die archaischen Zahlzeichen repräsentierten frühe Vertreter eben jener Zahlvorstellung, die später die Arithmetik in Mesopotamien geprägt hat. Diese Schlußfolgerung liegt auch sehr nahe. Das Sexagesimalsystem, das sich bald zum dominierenden System entwickelte, überlebte in graphisch unveränderter Form die archaische Periode um etwa 1000 Jahre und weitere 2000 Jahre in veränderter, jedoch strukturell gleichartiger Darstellung durch Keilschriftzeichen. Quellen, die Aufschluß über die sumerischen Zahlwörter geben, zeigen zudem eine außerordentliche strukturelle Ähnlichkeit der sumerischen Zahlwortreihe mit dem Sexagesimalsystem (diese Quellen stammen allerdings aus einer Zeit, in der das Sumerische schon





Hunderte von Jahren keine gesprochene Sprache mehr war).

Dies war Grund genug, daß den an späteren Texten orientierten Forschern das Sexagesimalsystem als das eigentliche System der Zahlzeichen und alles übrige als Metrologie erscheinen mußte. Hinzu kam die weitere Entwicklung der übrigen Systeme. Das Bisexagesimalsystem nämlich wurde schon bald, das heißt in der frühdynastischen Periode, durch das Sexagesimalsystem ersetzt. Das ŠE-System verschwand sogar bereits mit dem Ende der archaischen Periode. Für das EN-System gibt es überhaupt nur Texte aus der ältesten Schriftstufe in Uruk. Lediglich das GAN<sub>2</sub>-System blieb neben dem Sexagesimalsystem bestehen und wurde zu einem umfassenden System der Flächenmaße ausgebaut.

Unsere Analyse der archaischen Zahlzeichen und der Regeln ihrer Verwendung widerspricht dagegen dieser Deutung. Zwar war das Sexagesimalsystem in der archaischen Periode bereits voll entwickelt; und es spielte auch insofern schon eine bevorzugte Rolle, als es auf besonders viele Inhalte angewandt wurde. Dennoch gehören weniger als 50 Prozent aller Zahlnotationen der Archaischen Texte zu diesem System. In den übrigen Notationen wurden zwar überwiegend die gleichen Zeichen verwendet, aber als Zeichen anderer Systeme und daher mit anderer arithmetischer Bedeutung.

Gerade die Zeichen des Sexagesimalsystems, das scheinbar abstrakte Zahlen repräsentierte, waren in Wirklichkeit also in ihrer arithmetischen Bedeutung besonders variabel. Je nach ihrem inhaltlichen Zusammenhang änderte sich das System, in dem sie verwendet wurden, und damit ihr numerischer Wert. Nur gegen die Beweiskraft unserer statistischen Analysen kann man ihnen einen festen Zahlenwert als „eigentliche Bedeutung“ zuschreiben und sie damit als Zahlzeichen eines übergreifenden, abstrakten Zahlbegriffs interpretieren. Paradoxe Weise sind es gerade die stark an bestimmte Inhalte gebundenen Zeichen der von den Grundsystemen abgeleiteten Systeme und nicht die „abstrakten“ Zeichen, die am ehesten mit nur einer einzigen arithmetischen Bedeutung verwendet wurden.

### Zahlanaloga

Was ist die theoretische Alternative zu einer Interpretation der Zeichen als Zeichen für Zahlen? Der Gestaltpsychologe Max Wertheimer hat schon 1912 in einem berühmten Aufsatz über das Denken der Naturvölker sehr präzi-

se die psychologische Natur von arithmetischen Leistungen vor der Ausbildung eines abstrakten Zahlbegriffs beschrieben. Anhand von Forschungsberichten über Naturvölker postulierte er psychologische Strukturen, die er Zahlanaloge nannte; sie bleiben zwar an bestimmte Inhalte gebunden und sind insofern weniger abstrakt als unsere Zahlen, dienen aber dennoch ähnlichen Zwecken.

Es gibt inzwischen zahlreiche ethnologische Studien, die Wertheimers Annahmen bestätigen. Demnach haben viele vorschriftliche Kulturen eine Fülle von kontextgebundenen, protoarithmetischen Techniken entwickelt, die einen abstrakten Zahlbegriff weder voraussetzen noch notwendigerweise zur Folge haben.

Zahlreiche Merkmale der von uns analysierten archaischen Zahlzeichensysteme rücken sie in die Nähe solcher protoarithmetischen Techniken. Beispielsweise bezeichneten die Zahlzeichen grundsätzlich nicht Zahlen, sondern Einheiten. Die Vier wurde so nicht durch ein Zeichen wie unsere „4“, sondern geradezu physisch durch die vierfache Wiederholung eines Zeichens für die Einheit dargestellt.

Dies bedeutet, daß es keinen formalen Unterschied gab zwischen der Darstellung von Objekten und der von Zahlen. Man konnte daher die Regeln für die Verwendung der Zahlzeichensysteme auch mit der protoarithmetischen Vorstellung handhaben, die vier wiederholten Zeichen repräsentierten die vier dargestellten Objekte und nicht die Zahl Vier.

Es gibt in den Archaischen Texten auch keine expliziten, von den Inhalten unabhängigen Rechenoperationen. Bei Summenbildungen werden nur die gedachten Zusammenfügungen der Objekte mittels der sie repräsentierenden Zeichen nachvollzogen. Dementsprechend existiert auch keine operative Umkehrung zur Subtraktion. Die seltenen multiplikativen Zusammenhänge sind als Sachrelationen dargestellt – zum Beispiel in der Form, daß soundsovielen Broten soundsoviel Getreide entspricht – und wurden vermutlich vorwiegend mit additiven Operationen umgeformt. Zahlreiche „atypische“, das heißt durch den Kontext modifizierte Beispiele von Notationen vermitteln den Eindruck, die Angabe des Inhalts in ihrer Funktion als Merkhilfe habe stets Vorrang vor formalen Regeln des Zeichengebrauchs gehabt.

Diese protoarithmetischen Kennzeichen besagen indes nicht, daß es keinen Unterschied gäbe zwischen der Protoarithmetik schriftloser Kulturen und der Arithmetik, von der die Archaischen

Texte zeugen. Die darin enthaltenen Zahlnotationen weisen zwar Eigenarten auf, wie sie bislang nur aus vorschriftlichen Kulturen bekannt waren; zugleich aber bezeugen sie eine formale Komplexität und eine Leistungsfähigkeit für die Bewältigung auch komplizierter arithmetischer Probleme, wie sie in solchen Kulturen undenkbar wäre. Das gerade macht die Einzigartigkeit dieser Quellen für ein Studium der Entwicklung des Zahlbegriffs aus.

Die Analyse der Operationen, die mit den Zahlzeichen vollzogen wurden, ermöglicht Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden kognitiven Prozesse. So finden wir bereits erste abstrakte Operationen, die in entsprechenden symbolischen Handlungen wie den bereits standardisierten Operationen des Zusammenfassens von Einheiten zu höheren Einheiten zum Ausdruck kommen. Daneben aber behaupten sich weiterhin kontextgebundene mentale Operationen, die sich auf die konkreten Handlungen der Anwendungsbereiche beziehen. Sie sind es, welche die Veränderung arithmetischer Bedeutungen mit dem Kontext der jeweiligen Anwendungen bedingen.

### Vom Zahlanalogon zur abstrakten Zahlvorstellung

Die Untersuchung der Zahlbegriffsentwicklung in ihren Anfangsstadien stand bislang vor einem Dilemma: Einerseits gewähren die heute noch existierenden vorschriftlichen Kulturen zwar Einblicke in sehr frühe Formen dieser Entwicklung, andererseits besteht zu den Dokumenten des entwickelten mathematischen Denkens in den frühen Hochkulturen und in der klassischen Antike jedoch eine unüberbrückbare Kluft.

In den vorschriftlichen Kulturen fehlen nicht nur bestimmte Formen des abstrakten Denkens, sondern auch die Probleme und die arithmetischen Techniken, an denen sie sich manifestieren könnten. In den Schriftkulturen dagegen fand man bisher nur beides zugleich. Die Frage, ob zwischen beiden Stadien eine Entwicklung stattfand oder nur die epigenetische, also wie biologisch determiniert ablaufende Entfaltung einer universellen Struktur des menschlichen Denkens, blieb Gegenstand kontroverser Spekulationen.

Die Zahlzeichensysteme der Archaischen Texte liefern jetzt das fehlende Glied: Es beweist, daß die Entwicklung der Grundstrukturen des arithmetischen Denkens kulturell bedingt ist.

Wenn wir davon ausgehen, daß sich damit ein bestimmtes Stadium der Ent-

Beispiele	Stufen der Zahlbegriffsentwicklung	Zeitliche Einordnung
	Präoperative Stufe: Erste Zuordnungen von gleichartigen, relativ abstrakten Symbolen zu Objekten, jedoch keine systematischen Strukturierungen.	etwa 40 000 bis 10 000 vor Christus Jungpaläolithikum
	Protoarithmetische Stufe: Kontrolle von Quantitäten mit Hilfe eindeutiger Zuordnungen zwischen Objekten und Symbolen. Tradierung standardisierter Symbolsysteme. Einführung höherer Einheiten durch Bündelung.	ab etwa 10 000 vor Christus Vorschriftliche seßhafte Kulturen
	Archaische Arithmetik: Entwickelte arithmetische Techniken, jedoch noch keine kontextunabhängige Bedeutung der „Zahlzeichen“.	um 3 200 vor Christus Nachschriftliche seßhafte Kulturen
	Primäre Arithmetik: Universelle Zahldarstellung, explizite Arithmetik, jedoch kein darstellungsunabhängiger Zahlbegriff. Keine auf Zahlen als ideelle Objekte bezogenen Begriffsbildungen.	ab etwa 3 000 vor Christus Frühe Hochkulturen
	Abstrakter Zahlbegriff: Begriffliche Bestimmung der Zahlen als ideelle Objekte. Definition von Zahlen und Beweis von Zahleigenschaften.	ab etwa 500 vor Christus Griechische Antike

**Bild 7:** Kulturhistorische Stufen der Entwicklung des Zahlbegriffs. Der abstrakte Zahlbegriff ist das Ergebnis eines langen Entwicklungsprozesses, mit der Erfindung der Schrift als deutlichem Einschnitt. Ihren Ausgang nahm diese Entwicklung von der Stück-für-Stück-Zuordnung von Symbolen zu Gegenständen. Standardisierte „Zählmittel“ machten solche Zuordnungen zu einer gesellschaftlich tradierten Technik. Mit

der Erfindung der Schrift wurden „Zahlzeichen“ dann zu einem leistungsfähigen sekundären Darstellungsmittel, wobei die Zahldarstellung zunächst jedoch noch stark mit dem gezählten Objekt verhaftet blieb. Erst allmählich gewann sie ihre abstrakte Eigengesetzlichkeit. Schließlich führte die schriftlich fixierte begriffliche Bestimmung von Zahlgesetzen zur Differenzierung zwischen Zahldarstellung und Zahlbegriff.

wicklung sicher datieren läßt, können wir versuchen, die überlieferten Zeugnisse des frühen arithmetischen Denkens neu zu interpretieren. Es ergibt sich dann in etwa das folgende Gesamtbild der Entwicklung, die im abstrakten Zahlbegriff gipfelte (Bild 7).

Erste archäologische Zeugnisse, die auf eine Konstruktion von Korrespondenzen zwischen Objekten und Zählensymbolen im weitesten Sinne hindeuten, finden sich bereits in der jüngeren Altsteinzeit (ungefähr 40 000 bis 10 000 vor Christus). Die verwendeten Zählensymbole weisen jedoch noch kaum systematische Strukturierungen auf, die auf einen operativen Umgang mit ihnen schließen ließen.

Auf diese präoperative Stufe der Zahlbegriffsentwicklung folgt eine protoarithmetische Stufe, in der erstmals Konventionen zur symbolischen Darstellung von Mengen eingeführt worden sind. Im kognitiven Bereich kam es parallel zur Konstruktion von Zahlanaloga.

Grundlage dieser Fortentwicklung ist vermutlich die sogenannte agrarische Revolution – der Übergang zur systematischen Tierhaltung und Nahrungsmittelproduktion – mit ihren Anforderungen an die Vorratshaltung und die Organisation der Arbeitsteilung. Tatsächlich entspricht im Vorderen Orient die Periode, für die der Gebrauch von Zählensymbolen nachgewiesen ist, in etwa der Periode des Übergangs zur Seßhaftigkeit und der Ausbreitung von Ackerbau und Viehzucht.

Die Analyse der Zahlzeichensysteme der Archaischen Texte Mesopotamiens gibt uns eine Momentaufnahme des Übergangs von dieser Protoarithmetik zur Arithmetik im engeren Sinne. Sehr bald verlieren sich die eigentümlichen Eigenschaften der archaischen Zahlzeichensysteme, und es bildet sich noch im Verlaufe des dritten vorchristlichen Jahrtausends eine kontextunabhängige, „primäre“ Arithmetik heraus. Wie in anderen frühen Hochkulturen sind die

Träger dieser Entwicklung die Verwaltungsbeamten der staatlichen Bürokratien sowie die Schreiberschulen, in denen sie ausgebildet wurden.

Von dieser primären Arithmetik, die zwar kontextunabhängig ist, aber an bestimmte, konkrete Formen der Zahldarstellung durch Zeichensysteme gebunden bleibt, bis zum ideellen Begriff der abstrakten Zahl ist es freilich noch ein weiter Weg. Die babylonische Mathematik, die sich aus dieser Tradition entwickelte und im ersten Drittel des zweiten Jahrtausends vor Christus (also etwa 1500 Jahre nach der Erfindung der Schrift) ihre erste Blüte erreichte, kannte weder Definitionen noch Beweise; ihr fehlte selbst ein Wort, das in seiner Bedeutung unserem Wort „Zahl“ vergleichbar wäre.

Es scheint mithin, als seien Strukturaussagen über ideelle Objekte und damit auch die Ausbildung des Begriffs der Zahl der griechischen Antike vorbehalten geblieben.